Syllabus Sterrenkunde II

Astrometrie

J.M. van der Hulst

10 apr 1997

Rijks*universiteit* Groningen

Werkcollege 1: Astrometrie

Bedoeling van dit werkcollege is om vertrouwd te raken met sterrenkundige coördinaatsystemen en deze goed te leren hanteren. Dit betreft niet alleen de posities van sterren en andere hemellichamen maar ook tijdrekening. Omdat alle sterrenkundige coördinaatsystemen sferische coördinaatsystemen zijn speelt de boldriehoeksmeting hierbij een belangrijke rol. Deze zal in detail behandeld worden. Hierbij wordt kennis van de vlakke meetkunde bekend verondersteld.

Het doel van coördinaatsystemen is om nauwkeurig posities van objecten vast te kunnen leggen. Het meest bekend is uiteraard het gewone rechthoekige coördinaatsysteem dat bestaat uit een x-as, een y-as en een z-as die loodrecht op elkaar staan. Omdat de in de sterrenkunde objecten aan de hemel zien, dat wil zeggen geprojecteerd op een denkbeeldige bol (de hemelbol), ligt het voor de hand een bolcoördinaatsysteem te definiëren. Een dergelijk coördinaatsysteem wordt gekenmerkt door:

1. de keuze van fundamentele- of <u>grote cirkels</u>; dit zijn cirkels op de bol waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol.
2. de keuze van een <u>nulpunt</u>.
3. de keuze van een richting, links- of rechtsdraaiend gezien vanuit het middelpunt van de bol.

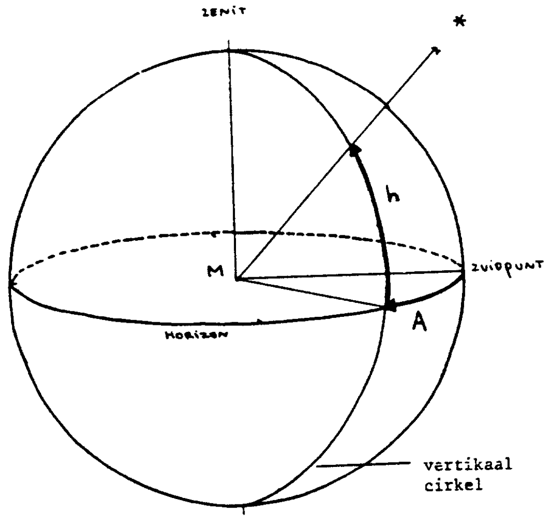
Coördinaten zijn hoeken gemeten langs grote cirkels. De hoeken worden gemeten in graden (360° rond een cirkel) of in uren (24 uur rond een cirkel)

Een bekend voorbeeld van zo'n coördinaatsysteem zijn de geografische lengte en breedte (en hoogte t.o.v. het aardoppervlak) die gebruikt worden voor plaatsbepaling op aarde. Hierbij zijn de grote cirkels de equator en de meridianen, is het nulpunt het snijpunt van de equator en de nulmeridiaan van Greenwich en is de richting linksdraaiend van west naar oost. We meten de geografische breedte vanaf de equator naar de noordpool (Noorderbreedte) of de zuidpool (Zuiderbreedte) en de geografische lengte vanaf de nulmeridiaan van Greenwich naar het westen (Westerlengte) of het oosten (Oosterlengte).

Een viertal gangbare coördinaatsystemen in de sterrenkunde zijn: het horizontale coördinaatsysteem (azimuth - hoogte), het equatoriale coördinaatsysteem (rechte klimming - declinatie), het galactische coördinaatsysteem (galactische lengte en breedte) en het ecliptische coördinaatsysteem (ecliptische lengte en breedte). Deze zijn hieronder in het kort samengevat. Voor een uitgebreide beschrijving kan men terecht in de vele boeken die de sterrenkunde bibliotheek heeft op het gebied van de sferische sterrenkunde.

§1 Het Horizontale Coördinaatsysteem

Dit coördinaatsysteem is gebonden aan de plaats op aarde waar de waarnemer zich bevindt. De ene basishoek is de hoogte h , gemeten langs de grote cirkel die loodrecht op de horizon staat en dus door het zenit gaat. Het zenit is het punt recht boven de waarnemer, d.w.z. het snijpunt van de hemelbol met de lijn die het middelpunt van de aarde met de waarnemer verbindt. De andere basishoek, het azimuth A, wordt gemeten langs de horizon vanaf het noorden naar het oosten (dus rechtsdraaiend met het noorden als nulpunt). Figuur 1 illustreert dit coördinaatsysteem.



Figuur 1: Het Horizontale Coördinaatsysteem.

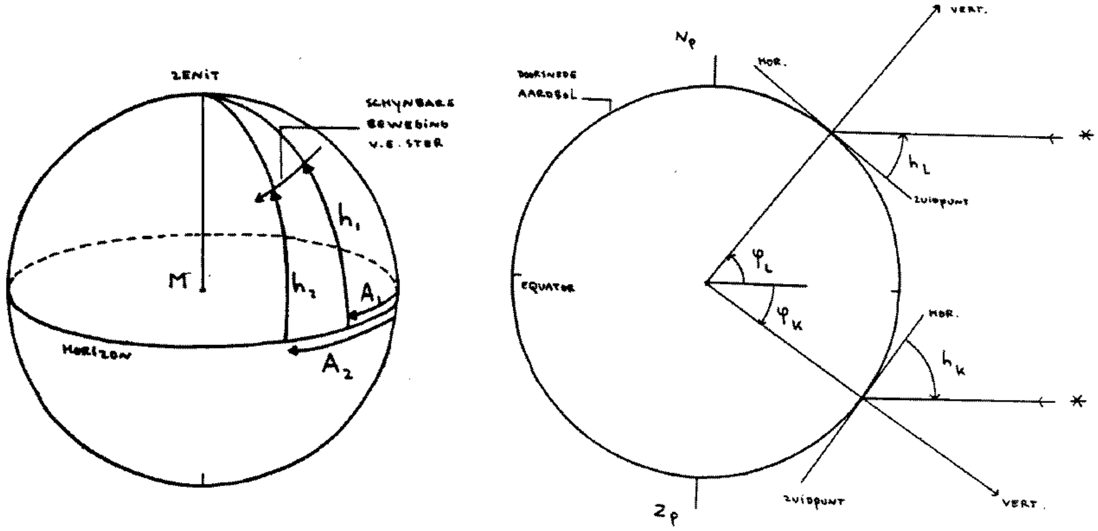
Een groot nadeel van dit coördinaatsysteem is dat de hoogte en het azimuth van een object afhankelijk zijn van de plaats op aarde en het tijdstip van waarneming. Dit is duidelijk te zien in Figuur 2 waar twee situaties getekend zijn die een verschillend tijdstip en een verschillende plaats van de waarnemer op het aardoppervlak aangeven. Dit betekent dat het niet mogelijk is de positie van een object met slechts twee getallen vast te leggen. Ook de tijd en de geografische lengte en breedte moeten worden vermeld.

Dit probleem kan worden omzeild door een slimmere keuze te maken voor ons coördinaatsysteem. Het ligt voor de hand tenminste één van de coördinaten zo te kiezen dat die ondanks de schijnbare beweging van de sterren konstant blijft. Omdat sterren een schijnbare beweging maken langs cirkels die evenwijdig aan de hemelequator (de snijlijn van de equator en de hemelbol) lopen is een goede keuze een hoek langs grote cirkels loodrecht op de hemelequator. De andere hoek zal dan langs de hemelequator gemeten moeten worden. Dit wordt daarom ook wel het equatoriale coördinaatsysteem genoemd.

§2 Het Equatoriale Coördinaatsysteem

Bij het equatoriale coördinaatsysteem zijn de grote cirkels de hemelequator en de uurcirkels, is het nulpunt het lentepunt en is het syteem linksdraaiend van west naar oost. De coördinaten heten:
rechte klimming (α): gemeten over de equator vanaf het lentepunt, van west naar oost, ($0 \rightarrow 24^{\mathrm{h}}$)
declinatie (δ): gemeten vanaf de equator tot de noordpool ($0 \rightarrow 90°$)
en vanaf de equator tot de zuidpool ($0 \rightarrow -90°$)

Het lentepunt is een denkbeeldig punt op de hemelequator dat gedefiniëerd is als het punt waarin de zon staat aan het begin van de lente (om precies te zijn op 21 maart rond 24^h UT). Tegenover het lentepunt ligt het herfstpunt, het punt waarin de zon aan het begin van de herfst staat. De rechte klimming en declinatie van het lentepunt zijn dan ook ($\alpha, \delta = 0^h, 0°$). Voor het herfstpunt geldt: ($\alpha, \delta = 12^h, 0°$).



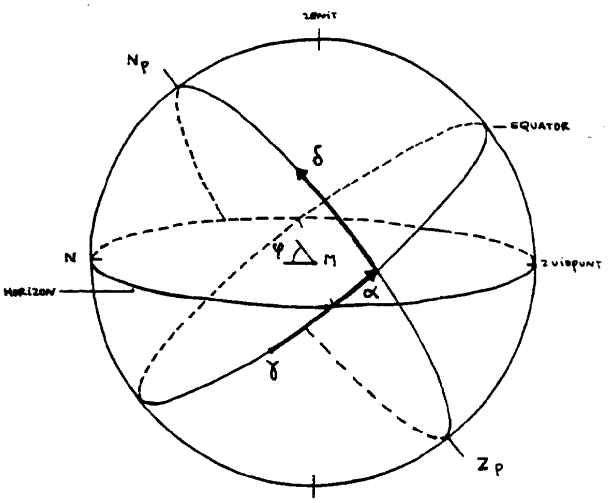
Figuur 2: Het horizontale coördinaatsysteem met de positie van een ster op twee verschillende tijdstippen en de hoogte van een ster als gezien vanuit twee verschillende geografische breedtes

De positie van het lentepunt heeft te maken met de schijnbare beweging van de zon aan de hemel. Deze beweging is in twee componenten te splitsen: de dagelijkse beweging, de dagcirkel die met de draaiing van de aarde om zijn as samenhangt en de jaarlijkse beweging die het gevolg is van de baan van de aarde rond de zon. De schijnbare jaarlijkse beweging van de zon aan de hemel is dus een projectie van de aardbaan op de hemelbol. Omdat de rotatieas van de aarde een hoek van 23.5° maakt met de equator is de schijnbare beweging van de zon gedurende een jaar niet langs een cirkel evenwijdig aan de equator (zoals het geval voor sterren) maar langs een grote cirkel (de ecliptica) die een hoek van 23.5° maakt met de equator. De dagcirkel van de zon is echter altijd evenwijdig aan de equator net als voor iedere andere ster. De ecliptica snijdt de hemelequator in het lentepunt en in het herfstpunt.

Omdat de rechte klimming een coördinaat is die samenhangt met de tijd (immers de beweging van sterren aan de hemel is een gevolg van de draaing van de aarde om zijn as en van de beweging van de aarde rond de zon) wordt deze meestal in uren i.p.v. in graden gemeten. Een met de rechte klimming samenhangende coördinaat is de uurhoek: de hoek, gemeten over de equator vanaf zuid naar west, die een ster maakt met het zuidpunt. Omdat de uurhoek toeneemt met de tijd is er een duidelijk verband tussen de tijd, d.w.z. de sterretijd t, de uurhoek HA en de rechte klimming α: HA $=$ t - α

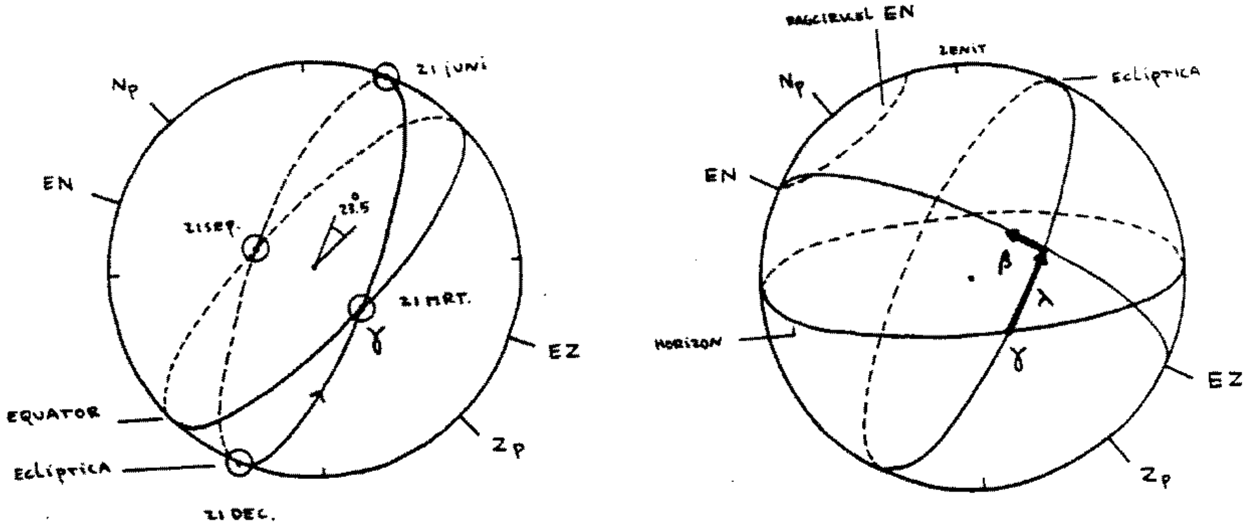
§3 Het Ecliptische Coördinaatsysteem

Voor de bepaling van posities van objecten in het zonnestelsel ligt het meer voor de hand een coördinaatsysteem in te richten dat het vlak van het zonnestelsel als referentie heeft. De grote cirkels zijn dan de ecliptica en grote cirkels loodrecht daarop, het nulpunt is het lentepunt en het systeem is linksdraaiend, van west naar oost.



Figuur 3: Het Equatoriale Coördinaatsysteem.

De coördinaten heten:
(astronomische) lengte (λ): Van nulpunt, van west naar oost, over de ecliptica
$(0 \rightarrow 360°)$
(astronomische) breedte (β): Van ecliptica richting noord $(0 \rightarrow +90°)$
Van ecliptica richting zuid $(0 \rightarrow -90°)$
De ecliptische noordpool is uiteraard het punt ($\alpha = 18^h, \delta = 66.5°$). Voor de zon is β constant in de tijd.

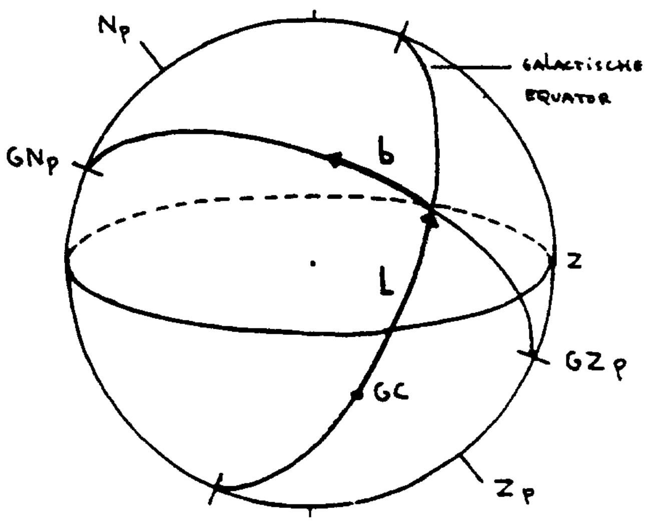


Figuur 4: Het Ecliptische Coördinaatsysteem.

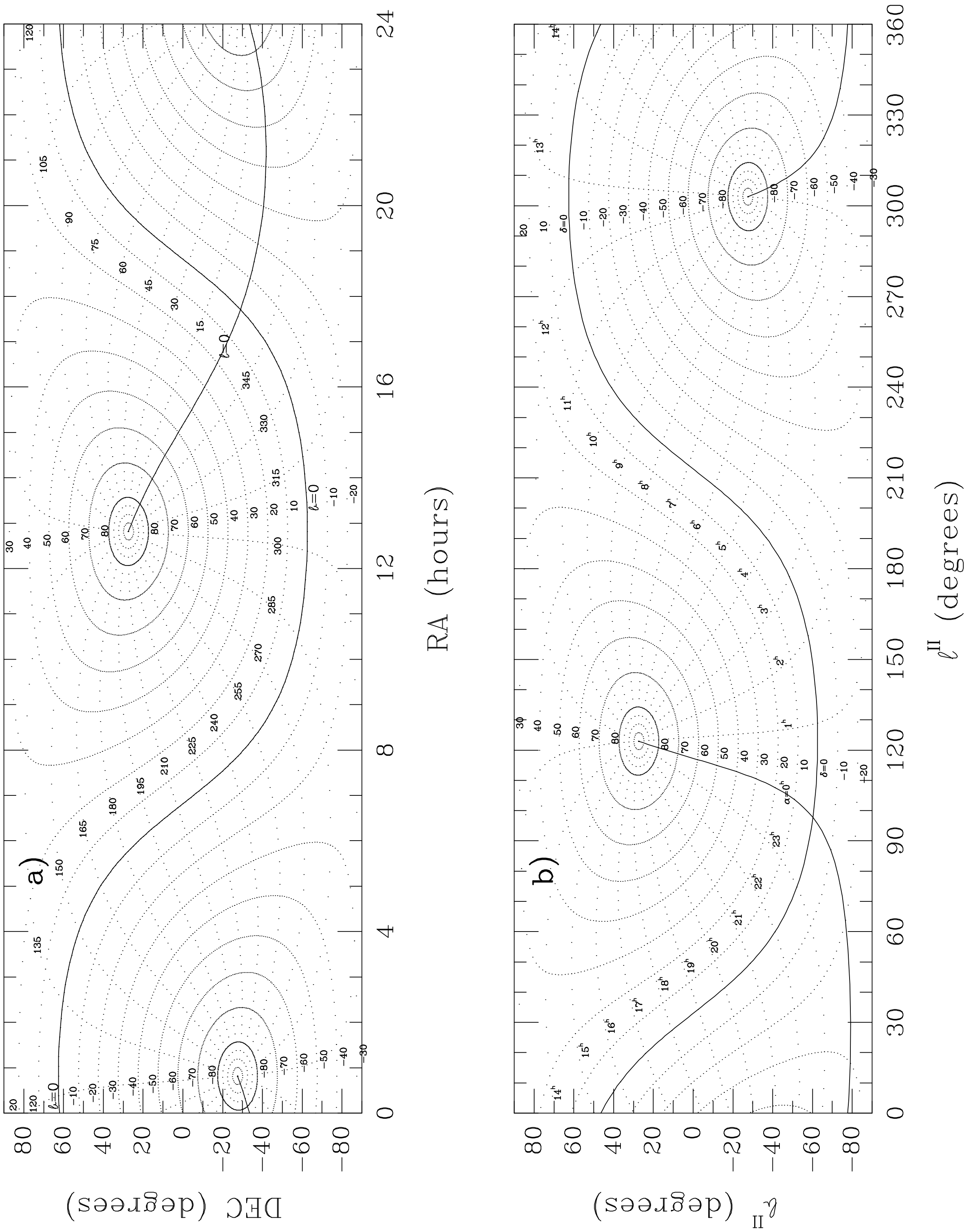
§4 Het Galactische Coördinaatsysteem

Net als voor het zonnestelsel definiëren we voor de melkweg het galactische coördinaatsysteem met als grote cirkels de galactische equator en grote cirkels loodrecht daarop, met als nulpunt het galactisch centrum ($\alpha = 17^h42.4^m, \delta = -28°55'$), en linksdraaiend.

De coördinaten heten:
galactische lengte (l^{II}): Van nulpunt, van west naar oost, over de ecliptica ($0 \rightarrow 360°$)
galactische breedte (b^{II}): Van ecliptica richting noord ($0 \rightarrow +90°$)
Van ecliptica richting zuid ($0 \rightarrow -90°$)



Figuur 5: Het Galactische Coördinaatsysteem.



Figuur 6: a) Plot van Galactische coördinaten als functie van rechte klimming en declinatie; b) plot van equatoriale coördinaten als functie van Galactische lengte en breedte.

§5 Tijdrekening

Voor de bepaling van posities van hemellichamen is het nodig iets te zeggen over tijdrekening. Het meest bekend is natuurlijk de tijd die we op ons horloge aflezen en die gekoppeld is aan de schijnbare dagelijkse beweging van de zon. Dit is de z.g. middelbare zonnetijd die gekoppeld is aan een fictief punt dat met regelmatige snelheid in 24 uur rond de equator beweegt. In werkelijkheid is de beweging van de zon rond de equator niet regelmatig omdat de aarde niet met een regelmatige snelheid rond de zon beweegt en omdat de ecliptica een hoek van 23.5° met de equator maakt. De werkelijke beweging van de zon langs de equator bepaalt de ware zonnetijd, die we kunnen afmeten uit opeenvolgende culminaties (hoogste punt aan de hemel) van de zon. Het verschil tussen de middelbare en de ware zonnetijd is de z.g. tijdsvereffening: tijdsvereffening = ware zonnetijd − middelbare zonnetijd.

De waarden voor de tijdsvereffening zijn te vinden in tabellenboeken, waarbij je altijd moet interpoleren tussen twee waarden om de tijdsvereffening te vinden op het gewenste tijdstip. Een goede bron voor informatie is de "Astronomical Almanac" die jaarlijks wordt uitgegeven door de U.S. Naval Observatory, een instantie die ook de tijd bijhoudt.

Met behulp van het voorgaande kunnen we de ware zonnetijd definiëren als de uurhoek van de zon + 12 uur.

Een belangrijker tijd is de sterretijd die samenhangt met de schijnbare beweging van de sterren aan de hemel. Zo is een sterredag de tijd tussen twee opeenvolgende culminaties van het lentepunt. Een sterredag is $23^h56^m04^s$ lang. De ware sterretijd is de uurhoek van het lentepunt. Omdat de sterretijd gelijk is aan de rechte klimming van een ster plus de uurhoek en omdat bij culminatie per definitie de uurhoek nul is kun je ook zeggen dat de sterretijd gelijk is aan de rechte klimming van een ster die op dat moment culmineert. Dit betekent ook dat de sterretijd locaal gedefinieëerd is omdat een bepaalde ster niet voor twee plaatsen op aarde op hetzelfde moment culmineert.

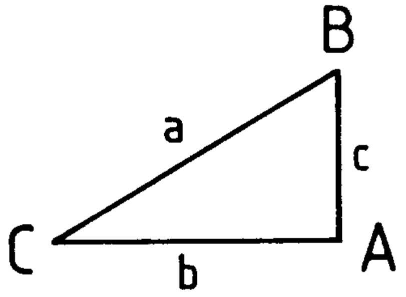
Daarnaast moet nog kort het begrip efemeriden tijd worden genoemd. Met de komst van moderne en nauwkeurige klokken bleek dat de rotatie van de aarde verre van regelmatig is en schokkerig verloopt. Voor de voorspelling van de posities van de zon en de planeten (wiens bewegingen bepaald worden door Newtons wet van de zwaartekracht en de daarvan afgeleide wetten van Kepler) bleek het beter om een gelijkmatig verlopende tijd te definiëren. Dit is de efemeriden tijd die bepaald wordt aan de hand van nauwkeurige metingen van de positie van de zon, de maan en de planeten. De efemeriden tijd blijkt nagenoeg gelijk te lopen met de tijd die we op atoomklokken af kunnen lezen. Om die reden wordt dan ook in de praktijk vaak IAT (International Atomic Time) gebruikt. Het verschil ΔT = Ephemeris Time − Universal Time wordt in de "Astronomical Almanac" getabelleerd.

Voor onze kalender zijn we gewend aan de z.g. Gregoriaanse kalender die 365 dagen per jaar telt en eens in de 4 jaar een dag extra toevoegt (het schrikkeljaar) om er voor te zorgen dat de 0.2425 dagen die elk jaar extra telt wordt ingelopen. Voor het schrikkeljaar geldt de regel dat alle jaren die door 4 deelbaar zijn een schrikkeljaar zijn, behalve als het het beginjaar van een nieuwe eeuw is. In dat geval zijn alleen die jaren die door 400 deelbaar zijn schrikkeljaren. Paus Gregorius XIII definiëerde deze kalender op 24 februari 1581 en het is een verfijning van de z.g. Juliaanse kalender die door Julius Caesar in 46 BC is ingesteld.

In de sterrenkunde wordt gebruikt gemaakt van een jaarrekening in Juliaanse dagen zo genoemd naar Julius Cäsar Scaliger de vader van Joseph Justus Scaliger die deze jaarrekening voorstelde in de 16e eeuw. Het begin van de Juliaanse kalender werd vastgesteld op 12^h UT 1 januari van het jaar -4712 en vanaf dat moment tellen we gewoon door. Zo is b.v. de Juliaanse dag 2432203.587: 18 januari 1947, 03^h05^m Universal Time (Greenwich Mean Time)

§6 Boldriehoeksmeetkunde

Om posities om te zetten van het ene naar het andere coördinaatsysteem (de z.g. coördinaattransformaties) is het nodig gebruik te maken van de boldriehoeksmeetkunde. Ervan uitgaande dat de vlakke meetkunde bekend is wordt hier de boldriehoeksmeetkunde in het kort behandeld.

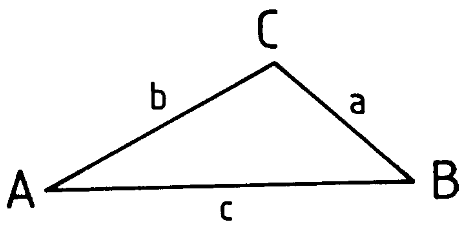


Figuur 7: De rechthoekige driehoek.

In figuur 7 geldt:

$$\sin C = c/a \tag{1}$$
$$\cos C = b/a \tag{2}$$

$$\tan C = c/b = \frac{\sin C}{\cos C} \tag{3a}$$
$$\cot C = b/c \tag{3b}$$



Figuur 8: Een willekeurige driehoek.

Verder geldt in het algemeen:

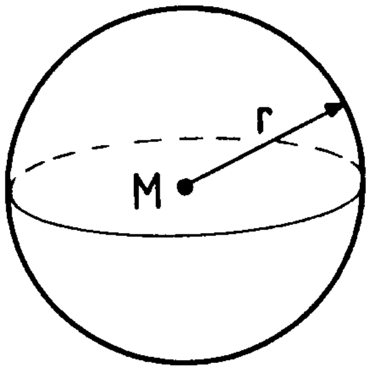
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \tag{4a}$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \tag{4b}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \text{(sinusregel)} \tag{5}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \text{(cosinusregel)} \tag{6}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (7a)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (7b)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (8a)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (8b)$$

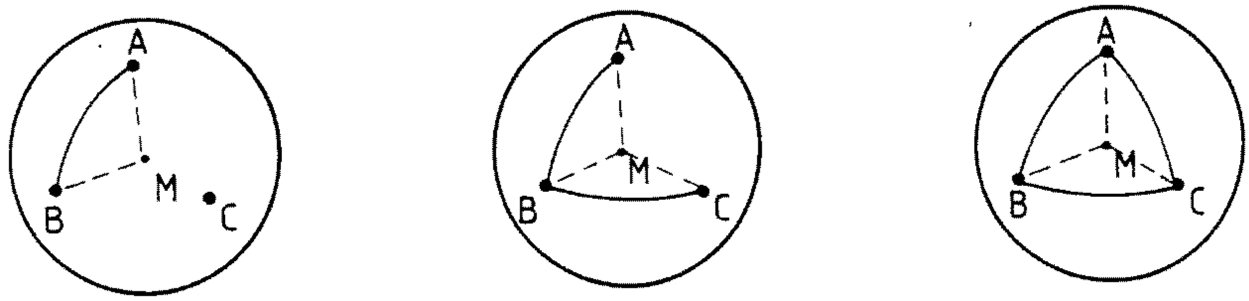
Definitie van een bol: Een bol is een verzameling van punten in de ruimte die allen dezelfde afstand (de straal van de bol) hebben tot een bepaald punt, het zogenoemde middelpunt van de bol.



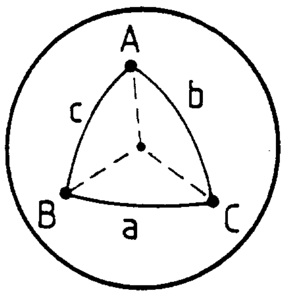
Figuur 9: Bol met straal r en middelpunt M.

- oppervlakte bol $= 4\pi r^2$ (9)
- inhoud bol $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (10)
- oppervlakte grote cirkel $= \pi r^2$ (11)
- omtrek grote cirkel $= 2\pi r$ (12)
- De doorsnede van een bol en een vlak is een cirkel.

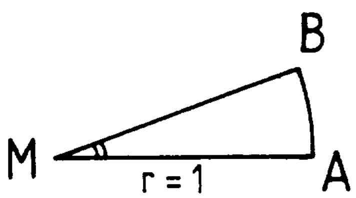
In de vlakke driehoeksmeetkunde wordt een driehoek gevormd door drie punten te nemen en deze door rechte lijnen met elkaar te verbinden.
Om een boldriehoek te construeren gaan we op een soortgelijke wijze te werk. Neem drie punten op de bol en verbindt deze met elkaar op de volgende manier: neem twee punten en bepaal het vlak door deze punten en het middelpunt van de bol. De doorsnede van dit vlak met de bol is een cirkel. Neem nu de kortste verbinding over de cirkel tussen de twee punten op de bol. Dit is nu één zijde van de boldriehoek, etc. (zie figuur 10 a t/m c).
In de praktijk heb je met bovenstaande procedure weinig te maken, maar het is een formele beschrijving die nodig is bij de volgende afleidingen.
In figuur 11 zie je de boldriehoek nog eens en nu zijn de namen van al zijn elementen (hoeken en zijden) ook aangegeven.
We nemen in het vervolg altijd een straal met lengte 1. Dit heeft de volgende consequentie: de lengte van boog AB is $\angle M$ in radialen (zie figuur 12)!
We zullen daarom de lengte van een boog gaan uitdrukken in graden of radialen!



Figuur 10: boog AB   boog BC   boog AC



Figuur 11: Boldriehoek.



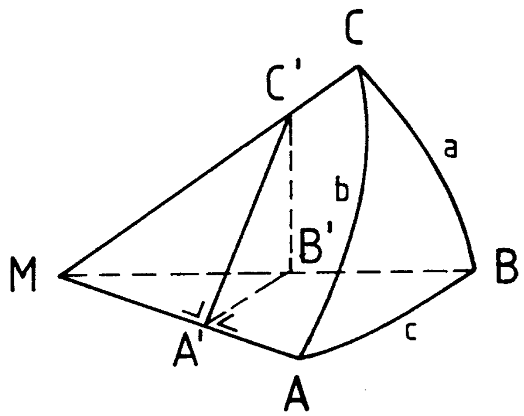
Figuur 12: boog $AB = \angle M$.

In onze boldriehoek van de figuren 10 en 11 geldt dus:

$$\begin{aligned} \text{boog } AB &= \angle BMA \\ \text{boog } BC &= \angle BMC \\ \text{boog } AC &= \angle AMC \end{aligned}$$

De grootte van de hoeken van een boldriehoek zijn op de volgende wijze te vinden: b.v. de hoek tussen boog AB en boog BC, dit is $\angle ABC$. Neem in punt B het raakvlak aan de bol. Teken in dit vlak de richtingen van de twee bogen in punt B. De hoek tussen deze twee richtingslijnen is de gevraagde hoek.

De rechthoekige boldriehoek



Figuur 13: De rechthoekige boldriehoek.

In figuur 13 is een rechthoekige boldriehoek ABC getekend. Deze boldriehoek is rechthoekig omdat één paar vlakken loodrecht op elkaar staan. Hier is het vlak $MBC \perp$ het vlak $MAB \Rightarrow \angle B = 90°$. Laten we nu uit een willekeurig punt C' van de ribbe MC een loodlijn $C'B'$ op de ribbe MB neer en brengen we daarna een vlak door $C'B'$ loodrecht op de ribbe MA aan dan is het vlak $A'B'C'$ het standvlak op de ribbe MA.

We kunnen nu laten zien dat $\angle B'A'C' = \angle A$.
Immers $\angle A$ is de hoek die de projecties van de bogen AC en AB op het raakvlak aan de bol in A met elkaar maken.

$A'C'$ ligt in het vlak MAC	}	$A'C'$ heeft dezelfde richting als de projectie van AC
$A'C' \perp MA$	}	op het raakvlak aan de bol in A.
$A'B'$ ligt in het vlak MAB	}	$A'B'$ heeft dezelfde richting als de projectie van AB
$A'B' \perp MA$	}	op het raakvlak aan de bol in A.

En dus $\angle B'A'C' = \angle A$.

Op soortgelijke wijze kunnen we steeds van een boldriehoek weer teruggaan naar een vlakke driehoek waarvan we reeds alles weten. Veel rekenwerk en het handig herschrijven van de goniometrische verhoudingen levert ons een tiental vergelijkingen op die de rechthoekige boldriehoek beschrijven. Als voorbeeld worden drie van de tien vergelijkingen bewezen in Appendix A. Wij zullen hier volstaan met het noemen van de regel van Napier die de tien vergelijkingen samenvat.

Regel van Napier: In elke rechthoekige boldriehoek is de cosinus van een element gelijk aan het product van de cotangensen der aanliggende elementen of gelijk aan het product van de sinussen der afliggende elementen, mits men voor de rechthoekszijden de complementen neemt en de rechte hoek niet meetelt.

Ter toelichting van de regel van Napier volgen hier een viertal voobeelden waarbij steeds figuur 13 wordt gebruikt.
Algemene opmerking vooraf: Elke driehoek heeft 6 elementen, te weten drie hoeken en drie zijden. Bij de regel van Napier wordt de rechte hoek (B) uitgesloten zodat er slechts 5 elementen overblijven, te weten A, C, a, b en c.

1) en 2)

$$\cos b = \cot A \cot C \tag{13}$$
$$\cos b = \sin(90^\circ - a) \cdot \sin(90^\circ - c) = \cos a \cos c \tag{14}$$

Vergelijking (13) volgt direct uit de regel van Napier als je weet dat de aanliggende elementen van zijde b die elementen zijn die het dichtst bij zijde b liggen.
Vergelijking (14) bevat de afliggende elementen van zijde b en dat zijn die elementen die het verst van zijde b verwijderd zijn. In dit geval zijn dat rechthoekszijden en dus moeten we het complement nemen.

3) We gaan uit van zijde a. Dit is een rechthoekszijde en dus gebruiken we het complement $\Rightarrow \cos(90^\circ - a) = \sin a$.
De afliggende elementen zijn nu b en A. C en c zijn de aanliggende elementen, want B doet niet mee!

$$\Rightarrow \sin a = \sin b \sin A \tag{15}$$

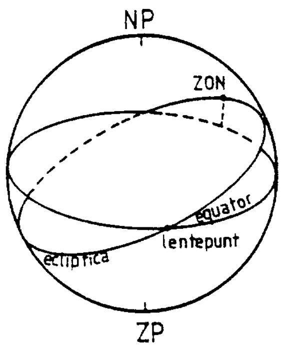
4) We gaan uit van hoek A. De aanliggende elementen zijn b en c en dus hebben we als we rekening houden met het feit dat c een rechthoekszijde is:

$$\cos A = \cot b \cot(90^\circ - c) \Leftrightarrow \cos A = \cot b \tan c \tag{16}$$

Hier volgen een tweetal voorbeelden:

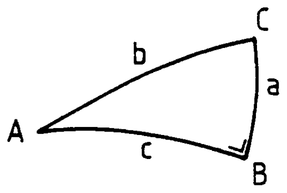
1. Gegeven: $\lambda_\odot - 108^\circ 47,4'$ ($\odot$ is teken voor de zon).
   Gevraagd: $\delta_\odot$ en $\alpha_\odot$.
   Neem als hellingshoek tussen equator en ecliptica $23^\circ 27'$.

   Oplossing: We tekenen een hemelbol met daarin de equator en de ecliptica (zie figuur 14). Vervolgens tekenen we de positie van de zon in het plaatje.



Figuur 14: De hemelbol.

Bekijken we nu de gewenste boldriehoek in detail dan krijgen we figuur 15.



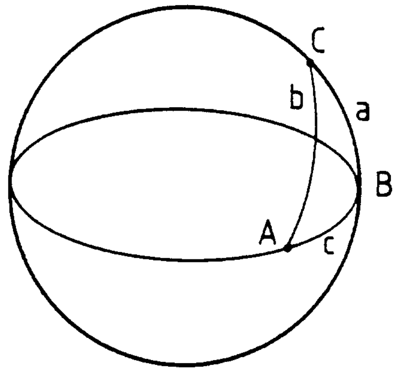
Figuur 15: De boldriehoek uit Voorbeeld 1.

De zon staat in punt C. Het herfstpunt is A. De zijde c is een stuk van de equator. De zijde b is een stuk van de ecliptica.

We weten nu:
$A = 23°27'$
$B = 90°$
$b = 180° - 108°47,4' = 71°12'36''$
$c = 12^{\mathrm{h}} - \alpha_{\odot}$
$a = \delta_{\odot}$
Met behulp van de regel van Napier vinden we nu:
$\sin a = \sin A \sin b.$
$\sin c = \cot A \tan a$
zodat we krijgen:
$\delta_{\odot} = 22°7'54,86''$
$\alpha_{\odot} = 7^{\mathrm{h}}21^{\mathrm{m}}23,51^{\mathrm{s}}.$

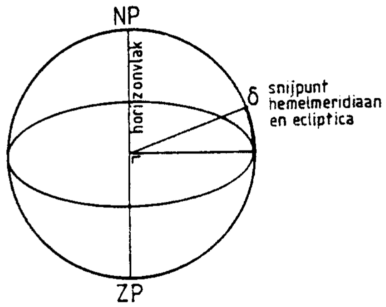
2. Gegeven: Sterretijd $= 4^{\mathrm{h}}58^{\mathrm{m}}12^{\mathrm{s}}$
Het snijpunt van de lokale hemelmeridiaan en ecliptica heeft een ware hoogte van $47°18.'4$ boven het Zuiden.
Gevraagd: Breedte van de waarnemer.

Oplossing: We tekenen eerst de hemelbol (vergelijk figuur 16 met figuur 14).
In figuur 16 is c een stuk van de hemelequator, b een stuk van de ecliptica en A is het lentepunt. We weten:
$c =$ sterretijd $= 74,55°$
$A = 23°27'$
$B = 90°$
met behulp van de regel van Napier vinden we nu:
$\cos C = \sin A \cos c \Rightarrow C = 83,914°$
$\sin a = \cot C \tan c \Rightarrow a = \delta = 22,69°.$



Figuur 16: Hemelbol uit Voorbeeld 2.

Dus het snijpunt van ecliptica en hemelmeridiaan ligt 22, 69° boven de hemele-quator.
In figuur 17 is het horizonvlak getekend van een waarnemer op de evenaar.



Figuur 17: Het horizonvlak van een waarnemer op de evenaar.

We zien dus dat de hoogte van het snijpunt $(90° - \delta)$ is en boven het Noorden ligt. Plaatsen we de waarnemer nu op een andere breedte (in dit geval noordelijk halfrond) dan krijgen we figuur 18.

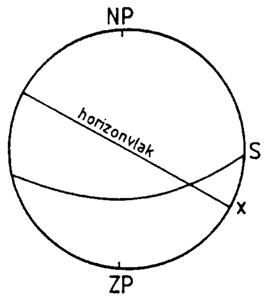
De horizon heeft dus t.o.v. de equator een andere hoek gekregen. De ware hoogte van het snijpunt boven het Zuiden is nu $\delta + x = 47°18,4' \Rightarrow x = 24,62°$. De breedte is nu $90° - x = 65°23'$ N.B.

De scheefhoekige boldriehoek

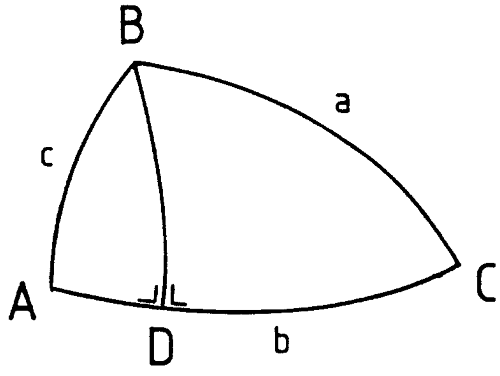
We behandelen nu de scheefhoekige boldriehoek. Het is uiteraard zo dat de formules voor de rechthoekige boldriehoek automatisch volgen uit die van de scheefhoekige boldriehoek. Waarom hebben we dan toch de rechthoekige boldriehoek zo uitvoerig behandeld?

1. Met de regel van Napier is het oplossen van de rechthoekige boldriehoek eenvoudiger dan met de formules voor de scheefhoekige boldriehoek.

2. De formules voor de scheefhoekige boldriehoek worden afgeleid met de kennis die we reeds hebben over de rechthoekige boldriehoek. Weliswaar is de afleiding van de formules voor ons van ondergeschikt belang, maar het ad hoc introduceren van formules is ook niet erg bevredigend.



Figuur 18: Het horizonvlak van een waarnemer op het noordelijk halfrond.



Figuur 19: De scheefhoekige boldriehoek ABC.

In figuur 19 is een scheefhoekige boldriehoek ABC getekend. In deze boldriehoek gelden de volgende drie belangrijke vergelijkingen (zie voor de afleidingen Appendix B):

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \qquad \text{(sinusregel)} \tag{17}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad \text{(cosinusregel)} \tag{18}$$

en door cyclische verwisseling krijgen we ook:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{19}$$

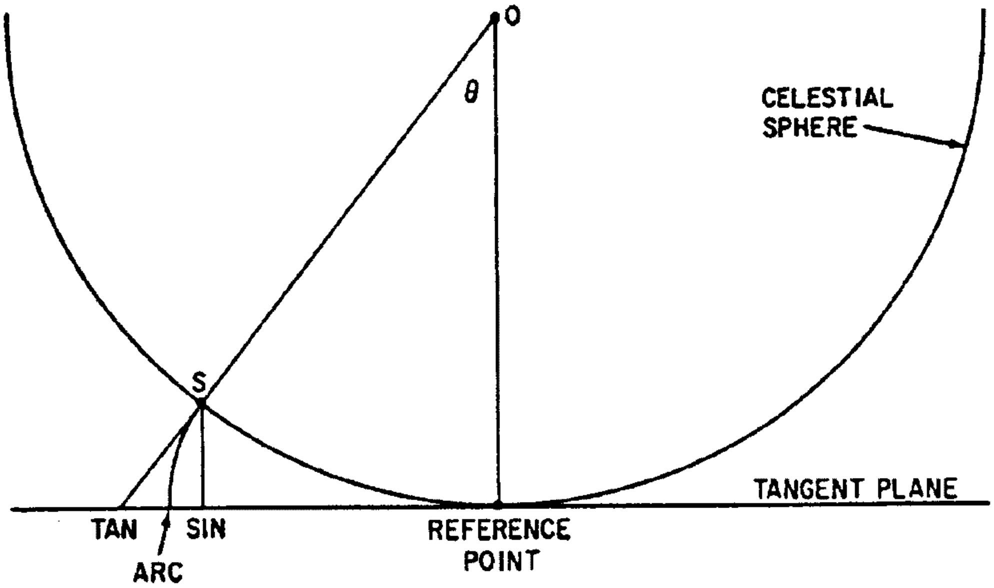
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \tag{20}$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \qquad \text{(sinus-cosinus regel)} \tag{21}$$

en door cyclische verwisseling ontstaan ook hier nog twee varianten van.
In principe is nu elke boldriehoek waarvan drie elementen bekend zijn oplosbaar met de hier gegeven regels. Soms kan het wel veel rekenwerk kosten!

§7 Projecties

Alle afbeeldingen in de sterrenkunde zijn projecties van een niet vlakke hemel op een plat vlak. Zoals bij het afbeelden van het aardoppervlak op een plat vlak in de aardrijkskunde is er sprake van verschillende projecties. Iedere projectie heeft zijn eigen transformatie om van het afgebeelde (x, y) coördinatensysteem terug te rekenen naar α, δ aan de hemel. Welke projectie gebruikt is hangt af van hoe men een afbeelding heeft gemaakt: met een optische telescoop en een camera, met een radio telescoop, met een Schmidt telescoop etc. Het projectievlak staat loodrecht op de optische as van de telescoop en heeft als raakpunt het snijpunt van de optische as met de hemelbol. De projectie beschrijft dan hoe het gekromde vlak van de hemelbol op dir raakvlak wordt afgebeeld. Figuur 20 geeft de situatie weer en laat een aantal projecties zien.



Figuur 20: Projecties van de hemelbol op het raakvlak

De meest voorkomende projecties zijn:

1. de TAN of gnomonische projectie die voor de meeste optische opnamen geldt. Deze projectie wordt bepaald door de stralengang in een conventionele optische telescoop en beschrijft de afbeelding van de hemel op een detector of fotografische plaat in het brandpunt van de telescoop.

2. de ARC of rechthoekige projectie waarbij de hoekafstanden tussen punten behouden is. Deze projectie geldt bij benadering geld voor Schmidt Telescopen. Deze zijn zo geconstrueerd dat ofwel gebruik wordt gemaakt van een corrector ofwel de plaat voor fotografische opnames in een gekromde plaathouder wordt gezet. De kromming van de plaat is zodanig dat de afbeelding van de hemel hoekafmetingen niet vervormd.

3. de SIN of orthografische projectie die gebruikt wordt voor radio synthese telescopen als de Very Large Array en de Australia Telescope.

4. de NCP of North Celestial Pole projectie (eigenlijk een orthografische projectie met de noordpool als raakpunt) die gebruikt wordt voor waarnemingen met de Westerbork Synthese Radio Telescoop.

Naast deze projecties zijn er nog andere zoals de Aitoff (behoudt oppervlaktes) en Mercator projecties die we hier niet verder zullen bespreken.
Het principe berust op de volgende formulering: in het projectievlak kan het punt (x, y) t.o.v. een referentiepunt (doorgaans het raakpunt met de hemelbol) worden voorgesteld als:

$$x = L\cos(\rho) + M\sin(\rho) \tag{22}$$
$$y = M\cos(\rho) - L\sin(\rho) \tag{23}$$

waar L en M de op het (x, y) vlak geprojecteerde hemelcoördinaten zijn (b.v. rechte klimming en declinatie), x en y de gewone cartesische coördinaten de we kennen uit de wiskunde, en ρ een rotatie is van het (x, y) coördinaatsysteem t.o.v. het (L, M) coördinaatsysteem. Let erop dat we doorgaans voor het (x, y) coördinaatsysteem ervan uit gaan dat x toeneemt van links naar rechts, terwijl b.v. bij een projectie van rechte klimming en declinatie de rechte klimming (en dus ook L) toeneemt van rechts naar links! Het (x, y) en het (L, M) systeem zijn beide gewone, lineaire, orthogonale coördinaatsystemen. Als we het referentiepunt aangeven met α_0 en δ_0 kunnen we gewoon de boldriehoeksregels toepassen en de volgende transformatieformules afleiden:

$$\cos\theta = \sin\delta\sin\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha - \alpha_0) \tag{24}$$
$$\sin\theta\sin\phi = \cos\delta\sin(\alpha - \alpha_0) \tag{25}$$
$$\sin\theta\cos\phi = \sin\delta\cos\delta_0 - \cos\delta\sin\delta_0\cos(\alpha - \alpha_0) \tag{26}$$

waar θ de hoek is tussen het raakpunt met het projectievlak (het "tangent point" (α_0, δ_0)) en het punt (α, δ) gemeten langs een grote cirkel door (α_0, δ_0) en (α, δ) en ϕ de hoek die deze grote cirkel maakt met de grote cirkel door (α_0, δ_0) en beide hemelpolen. Deze situatie is in figuur 21 geschetst.

Met behulp van deze formules kunnen we transformaties afleiden voor elk van de bovengenoemde projecties. Deze zijn hieronder gegeven.

Gnomonische projectie:

Voor deze projectie geldt:

$$L = \tan\theta \sin\phi \tag{27}$$

$$M = \tan\theta \cos\phi \tag{28}$$

zodat we m.b.v. (24), (25) en (26) kunnen afleiden:

$$L = \frac{\cos(\delta)\sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin(\delta)\sin\delta_0 + \cos(\delta)\cos(\delta_0)\cos(\alpha - \alpha_0)} \tag{29}$$

$$M = \frac{\sin(\delta)\cos(\delta_0) - \cos(\delta)\sin(\delta_0)\cos(\alpha - \alpha_0)}{sin(\delta) sin\delta_0 + \cos(\delta)\cos(\delta_0)\cos(\alpha - \alpha_0)} \tag{30}$$

en omgekeerd:

$$\cot(\delta)\sin(\alpha - \alpha_0) = \frac{L}{\sin(\delta_0) + M\cos(\delta_0)} \tag{31}$$

$$\cot(\delta)\cos(\alpha - \alpha_0) = \frac{\cos(\delta_0) - M\sin(\delta_0)}{\sin(\delta_0) + M\cos(\delta_0)} \tag{32}$$

Rechthoekige projectie:

Bij deze projectie zijn de basisformules:

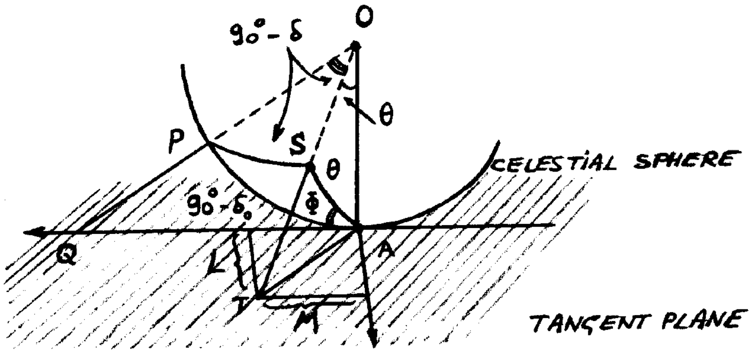
$$L = \theta \sin\phi \tag{33}$$

$$M = \theta \cos\phi \tag{34}$$

zodat we m.b.v. (24), (25) en (26) kunnen afleiden:

$$L = \frac{\theta}{\sin(\theta)}\cos(\delta)\sin(\alpha - \alpha_0) \tag{35}$$

$$M = \frac{\theta}{\sin(\theta)}\Big(\sin(\delta)\cos(\delta_0) - cos(\delta) sin(\delta_0)\cos(\alpha - \alpha_0)\Big) \tag{36}$$



Figuur 21: Geometrie van de projectie op het raakvlak

met

$$\cos(\theta) = \sin(\delta)\sin(\delta_0) + \cos(\delta)\cos(\delta_0)\cos(\alpha - \alpha_0) \tag{37}$$

en omgekeerd:

$$\alpha = \alpha_0 + \sin^{-1}\Big(\frac{L\sin\theta}{\theta\cos\delta}\Big) \tag{38}$$

$$\delta = sin^{-1}\Big(\frac{\theta M cos\delta_0}{\sin\theta} + \sin\delta_0\cos\theta\Big) \tag{39}$$

Orthographische projectie:

Bij deze projectie geldt:

$$L = \sin\theta\sin\phi \tag{40}$$

$$M = \sin\theta\cos\phi \tag{41}$$

zodat we m.b.v. (24), (25) en (26) kunnen afleiden:

$$L = \cos(\delta)\sin(\alpha - \alpha_0) \tag{42}$$

$$M = \sin(\delta)\cos(\delta_0) - \cos(\delta)\sin(\delta_0)\cos(\alpha - \alpha_0) \tag{43}$$

on omgekeerd:

$$\alpha = \alpha_0 + \tan^{-1}\Big(\frac{L}{\cos\delta_0\sqrt{1 - L^2 - M^2} - M\sin\delta_0}\Big) \tag{44}$$

$$\delta = \sin^{-1}\Big(M\cos\delta_0 + \sin\delta_0\sqrt{1 - L^2 - M^2}\Big) \tag{45}$$

North Celestial Pole projectie:

Deze projectie is gelijk aan de orthografische projectie met het verschil dat de noordpool altijd als raakpunt genomen wordt. De basisformules worden dan:

$$L = \cos(\delta)\sin(\alpha - \alpha_0) \tag{46}$$

$$M = \frac{\cos(\delta_0) - \cos(\delta)\cos(\alpha - \alpha_0)}{\sin(\delta_0)} \tag{47}$$

x en y volgen dan uit (22) en (23).

§8 Precessie

Een belangrijk effect dat direct invloed heeft op de gemeten coördinaten van een object is dat ten gevolge van precessie. De gravitatiekracht van de maan en de zon oefenen een koppel uit op de aarde omdat de aarde niet rond is maar enigszins afgeplat aan de polen. Tengevolge van dit koppel precedeert de aardas met een periode van 25725 jaar rond de normaal van het baanvlak van de aarde rond de zon. Hipparchus had dit al gemerkt in de tweede eeuw voor Christus. Precessie manifesteert zich als een langzame retrograde beweging van het lentepunt t.o.v. de sterrenhemel. Naast precessie is er ook het effect van de maan: een slingerende beweging t.o.v. de precessie cirkel die veroorzaakt wordt door het feit dat het vlak van de maanbaan niet samenvalt met het vlak van de ecliptica en dus het koppel van de maan op de aarde variëert. De details van precessie en nutatie (zoals ook een ander tweede orde effect: aberratie) staan in detail beschreven in de Astronomical Almanac.

Het zal duidelijk zijn dat het belangrijkste effect een verandering in rechte klimming en declinatie is met de tijd door de verandering (precessie) van het nulpunt van het coördinaatsysteem. Het is dus belangrijk voor precessie te corrigeren bij het gebruiken van posities van objecten. Tot nu toe was het gebruikelijk posities te herleiden tot het jaar 1950.0 maar sinds kort worden ook posities herleid tot het jaar 2000.0 gebruikt. Bij posities staat altijd deze z.g. epoche aangegeven. Bij het bepalen van eigenbewegingen uit opnames op verschillende tijdstippen die doorgaans vele jaren uit elkaar liggen is het bijvoorbeeld belangrijk rekening te houden met de positieveranderingen t.g.v. precessie.
Voor een ster met positie α, δ wordt de positieverandering ten gevolge van precessie gegeven door (de precessie is herleid tot epoche 2000.0 met precessieconstanten uit de Astronomical Almanac van 1995):

$$\alpha(2000.0) = \alpha(T) - M - N \sin \alpha_m \tan \delta_m \tag{48}$$

$$\delta(2000.0) = \delta(T) - N \cos \alpha_m \tag{49}$$

waarbij M en N gegeven zijn door:

$$M = 1.2812323°T + 0.0003879°T^2 + 0.0000101°T^3 \tag{50}$$

$$N = 0.5567530°T - 0.0001185°T^2 - 0.0000116°T^3 \tag{51}$$

met T het aantal **eeuwen** tot 2000.0. Dus: $T = (t - 2000.0)/100$, met t in jaren.
α_m en δ_m zijn α en δ voor de gemiddelde epoche en worden bij benadering geschreven als:

$$\alpha_m = \alpha - \frac{1}{2}(M + N \sin \alpha \tan \delta) \tag{52}$$

$$\delta_m = \delta - \frac{1}{2} N \cos \alpha_m \tag{53}$$

of:

$$\alpha_m = \alpha_0 + \frac{1}{2}(M + N \sin \alpha_0 \tan \delta_0) \tag{54}$$

$$\delta_m = \delta_0 + \frac{1}{2} N \cos \alpha_m \tag{55}$$

§9 Werkstukken

opgave 1 Laat zien dat de hoogte van de noordpool (positie van de Poolster) aan de hemel overeenkomt met de geografische breedte van de waarnemer. Maak hiervoor gebruik van een goede tekening en geef hierin de verschillende hoeken en grote cirkels duidelijk aan.

opgave 2 Een waarnemer bevindt zich op een geografische breedte van 25° Z.B. Sterren met welke declinaties zijn voor deze waarnemer circumpolair, d.w.z. gaan nooit onder? Verduidelijk ook hier je antwoord met een **goede** tekening.

opgave 3 We bevinden ons op westerlengte $58°20'$ en binnen tijdzone GMT $-$ 4 aan boord van het schip de Zuiderkruis. Het schip is goed uitgerust en heeft een nauwkeurige klok die UT (Greenwich Mean Time) aangeeft. Op UT $07^h15^m11^s$ nemen we de ster Regulus ($\alpha = 10^h05^m11^s$) waar. Bepaal de lokale sterretijd (LST) en vervolgens de uurhoek van Regulus. De sterretijd in Greenwich (GST) die dag om 0^h UT was $06^h53^m34^s$. Reken eerst het aantal uren sterretijd uit na 0^h UT en houdt met de berekening van de LST rekening met de geografische lengte.

opgave 4 Een ster met declinatie $42°21'$ wordt waargenomen op uurhoek $08^h16^m42^s$. De geografische breedte van de waarnemer is $60°$. Bereken het azimuth en de hoogte van de ster. Maak hiervoor gebruik van de boldriehoeksmeting. Voor het oplossen van het probleem is een **goede** tekening met daarin aangegeven de verschillende hoeken en grote cirkels onontbeerlijk.

opgave 5 We hebben de beschikking over een wide field CCD opname gecentreerd op de positie ($\alpha = 12^h, \delta = 75°$). De CCD heeft 2048×2048 pixels en de pixel grootte is $2'' \times 2''$. Over de CCD ligt een rechthoekig coördinatensysteem (x, y) dat loopt van $(-1023, -1023)$ (linker benedenhoek van de CCD) tot $(1024, 1024)$ (rechter bovenhoek van de CCD). De α, δ-coördinaten waar de telescoop naar gericht werd tijdens de opname (het raakpunt α_0, δ_0) correspondeert met het punt $(0, 0)$. Op $(x, y) = (-233, 1012)$ vinden we een interessante planetaire nevel. Bereken de α, δ van dit object. De opname is zo verricht dat er geen rotatie is tussen de α, δ en x, y coördinaten. (N.B. toenemende x waarden komen overeen met afnemende waarden van rechte klimming α).

opgave 6 Van hetzelfde veld hebben we een waarneming met de Westerbork Synthese Radio Telescoop. We zien een aantal radiobronnen in het gebied van de planetaire nevel, maar hebben een nauwkeurige (x, y) positie nodig voor identificatie. Bereken de (x, y) positie in de radio kaart. Het referentiepunt in de radio kaart is hetzelfde als in het geval van de CCD opname ($\alpha = 12^h, \delta = 75°$) en ook het grid is $2'' \times 2''$ en bestaat uit 2048×2048 punten. Hoe groot is het verschil tussen de hier gevonden (x, y) positie en die uit opgave 5? Hoe zou dit verschil uitvallen als het referentie punt bij ($\alpha = 12^h, \delta = 5°$) had gelegen?

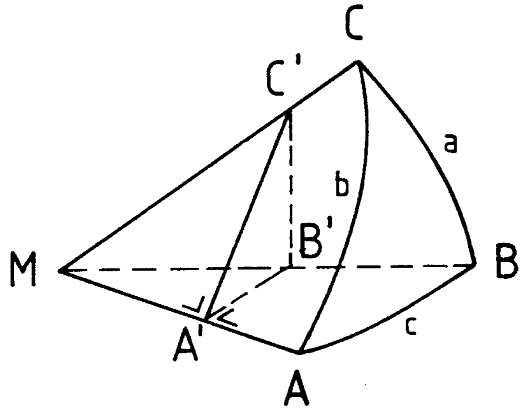
opgave 7 We hebben ook een radio kaart verkregen met de Very Large Array. Herhaal opgave 6 maar nu voor de bijbehorende projectie. Verklaar het verschil met de voorgaande twee projecties.

opgave 8 We hebben een CCD opname van het melkwegstelsel Messier 33. Op de opname staan 12 sterren waarvoor we nauwkeurige posities hebben uit de Space Telescope Guide Star Catalogue. Van de CCD opname is onbekend wat de centrale positie is, wat de schaal is en wat de orientatie aan de hemel is. Het enige dat we zeker weten is dat het centrale CCD pixel (0,0) op de optische as ligt en dat we te maken hebben met een gnomonische projectie. We kunnen dit uiteraard bepalen aan de hand van de (x, y) posities van de sterren waarvoor we nauwkeurige rechte klimmingen en declinaties hebben. Welke parameters hebben we nodig om het (x, y) grid van de CCD nauwkeurig te beschrijven? Zijn 12 sterren genoeg om deze te bepalen?

opgave 9 De CCD opname en de Westerbork en VLA metingen zijn verricht in 1994.5 . We zijn geinteresseerd in de eigenbeweging van de planetaire nevel en gaan daartoe naar de Palomar Sky Survey om de positie van de nevel ten tijde van de Sky Survey opname te bepalen. De betreffende sky survey plaat is van 1949.5 . Corrigeer de α, δ van de planetaire nevel voor precessie en bereken zijn $\alpha(1949.5)$, $\delta(1949.5)$. Doe dit zowel voor $\delta = 75°$ als voor $\delta = 0°$.

Appendix A: De rechthoekige boldriehoek

Voor de duidelijkheid herhalen we figuur 13.



Figuur 13*: De rechthoekige boldriehoek.

Er geldt

$$\begin{aligned}
\text{in } \Delta MA'B' &: \quad MA' = MB' \cos \angle A'MB' = MB' \cos c & (56)\\
\text{in } \Delta MA'C' &: \quad MA' = MC' \cos \angle A'MC' = MC' \cos b & (57)\\
\text{in } \Delta MB'C' &: \quad MB' = MC' \cos \angle B'MC' = MC' \cos a & (58)
\end{aligned}$$

Uit (56) en (57) volgt

$$MB' \cos c = MC' \cos b \qquad (59)$$

Na substitutie van MB' uit (58) in (59) volgt;

$$\begin{aligned}
MC' \cos a \cos c &= MC' \cos b \Leftrightarrow & (60)\\
\cos b &= \cos a \cos c & (61)
\end{aligned}$$

Verder geldt

$$\begin{aligned}
\text{in } \Delta A'B'C' &: \quad B'C' = A'C' \sin \angle B'A'C' = A'C' \sin A & (62)\\
\text{in } \Delta MB'C' &: \quad B'C' = MC' \sin \angle B'MC' = MC' \sin a & (63)\\
\text{in } \Delta MA'C' &: \quad A'C' = MC' \sin \angle A'MC' = MC' \sin b & (64)
\end{aligned}$$

Uit (62) en (63) volgt:

$$A'C' \sin A = MC' \sin a \qquad (65)$$

Na substitutie van $A'C'$ uit (64) in (65) volgt:

$$\begin{aligned}
MC' \sin b \sin A &= MC' \sin a \Leftrightarrow & (66)\\
\sin a &= \sin b \sin A & (67)
\end{aligned}$$

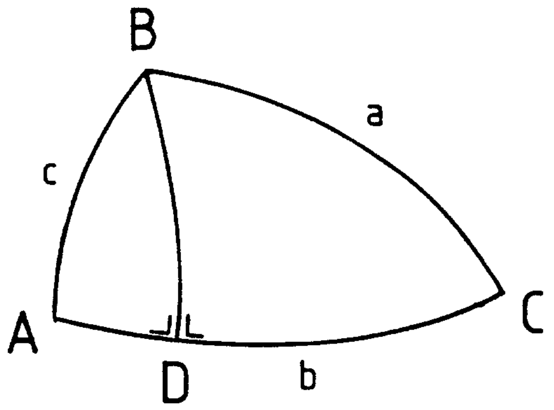
Vervolgens

$$\begin{aligned}
\text{in } \Delta A'B'C' &: \quad A'B' = A'C' \cos \angle B'A'C' = A'C' \cos A & (68)\\
\text{in } \Delta MA'B' &: \quad A'B' = MA' \tan \angle A'MB' = MA' \tan c & (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A'C' \cos A &= MA' \tan c \Leftrightarrow \frac{A'C'}{MA'} \cos A = \tan c \Leftrightarrow & (70)\\
\tan b \cos A &= \tan c \Leftrightarrow \cos A = \tan c \cot b & (71)
\end{aligned}$$

Op soortgelijke wijze worden ook de 7 andere vergelijkingen afgeleid die uit de regel van Napier volgen.

Appendix B: De scheefhoekige boldriehoek



Figuur 19 *: De scheefhoekige boldriehoek.

Ook hier hebben we voor de duidelijkheid de bijbehorende figuur herhaald.
Nu geldt

$$\text{in } \Delta ABD \;:\; \sin BD = \sin AB \sin A \quad \text{(regel van Napier)} \tag{72}$$

$$\text{in } \Delta BCD \;:\; \sin BD = \sin BC \sin C \quad \text{(regel van Napier)} \tag{73}$$

$$\Rightarrow \sin AB \sin A = \sin BC \sin C \Leftrightarrow \frac{\sin AB}{\sin C} = \frac{\sin BC}{\sin A} \Leftrightarrow \tag{74}$$

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a} \tag{75}$$

Op volstrekt identieke wijze volgen als je loodrechte bogen neerlaat uit A en D en deze procedure herhaalt, dezelfde verhoudingen. Deze verhoudingen noemen we de sinusregel.

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad \text{(sinusregel)} \tag{76}$$

We gaan nu de cosinusregel afleiden. Zie figuur 19 *.
In ΔABD:

$$\cos c = \cos AD \cos BD \Leftrightarrow \quad \text{(regel van Napier)} \tag{77}$$

$$\cos c = \cos(AC - CD) \cos BD \Leftrightarrow \tag{78}$$

$$\cos c = (\cos AC \cos CD + \sin AC \sin CD) \cos BD \tag{79}$$

echter:

$$\cos CD \cos BD = \cos a \quad \text{(regel van Napier)}$$

dus:

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin CD \cos BD \tag{80}$$

In ΔBCD:

$$\cos C = \cot a \tan\, CD = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin CD}{\cos CD} \tag{81}$$

echter

$$\cos a = \cos BD \cos CD$$

dus

$$\cos C = \frac{\cos BD \cos CD}{\sin a} \cdot \frac{\sin CD}{\cos CD} = \frac{\cos BD \sin CD}{\sin a} \Leftrightarrow \tag{82}$$

$$\cos C \sin a = \cos BD \sin CD \tag{83}$$

Substitueer nu (83) in (80) en dan krijgen we:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad \text{(cosinusregel)} \tag{84}$$

Het spreekt voor zich dat door cyclische verwisseling der letters deze formule nog twee varianten kent die ontstaan als we loodrechte bogen neerlaten uit de punten A en C in figuur 19 *. Dus:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{85}$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \tag{86}$$

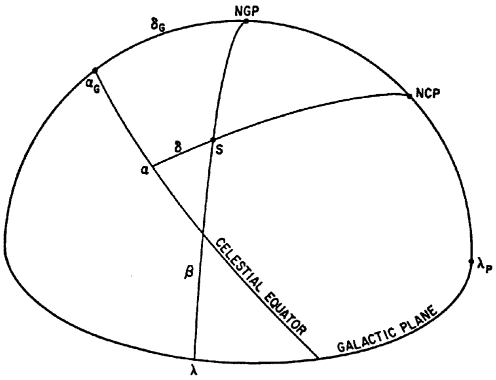
Tot slot leiden we de sinus-cosinus regel nog af.

$$
\begin{aligned}
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Leftrightarrow && (84^*) \\
\sin a \sin b \cos C &= \cos c - \cos a \cos b \Leftrightarrow && (87) \\
\sin a \sin b \cos C &= \cos c - \cos a \underbrace{(\cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B)}_{= \cos b \ (86)} \Leftrightarrow && (88) \\
\sin a \sin b \cos C &= \cos c(1 - \cos^2 a) - \sin c \sin a \cos a \cos B \Leftrightarrow && (89) \\
\sin a \sin b \cos C &= \cos c \sin^2 a - \sin c \sin a \cos a \cos B \Leftrightarrow && (90) \\
\sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \quad \text{(sinus-cosinus regel)} && (91)
\end{aligned}
$$

En cyclische verwisseling leidt tot de overige twee varianten van de sinus-cosinusregel.

Appendix C: Transformatie van hemelcoördinaten naar Galactische en ecliptische coordinaten

Voor waarnemers van objecten in de Melkweg is het vaak meer relevant om hun waarnemingen in Galactische coördinaten weer te geven dan in equatoriale coördinaten. Aangetoond kan worden, dat voor elke geometrische projectie op een raakvlak aan de hemelbol de twee systemen equivalent zijn op een verandering van de referentiecoördinaten (α_0, δ_0) en de rotatiehoek ρ na. Merk op dat de NCP projectie geen gebruik maakt van een raakvlak aan de hemel bol in (α_0, δ_0), maar altijd de noordpool als raakpunt heeft, en daarom niet kan worden weergegeven in andere coördinaten.
We geven nu de transformatieformules voor de transformatie van (α, δ) naar (l^{II}, b^{II}) en terug. Laat $(\alpha_{NGP}, \delta_{NGP})$ de equatoriale coördinaten zijn van de Galactische noordpool $(\alpha_{NGP}, \delta_{NGP}) = (12^h 49^m, 27°24')$ en l^{II}_{NCP} de Galactische lengte van de noordelijke hemelpool $(123\overset{\circ}{.}0)$. Om de transformatie uit te voeren hoeven we alleen de boldriehoek NGP-S-NCP op te lossen (zie figuur C1):



Figuur C1: Equatoriale en Galactische coördinaten van object S.

$$
\begin{aligned}
\sin b^{II} &= \sin\delta \sin\delta_{NGP} + \cos\delta \cos\delta_{NGP} \cos(\alpha - \alpha_{NGP}) \\
\cos b^{II} \sin(l^{II}_{NCP} - l^{II}) &= \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_{NGP}) \qquad (92) \\
\cos b^{II} \cos(l^{II}_{NCP} - l^{II}) &= \sin\delta \cos\delta_{NGP} - \cos\delta \, sin\delta_{NGP} \cos(\alpha - \alpha_{NGP}) \qquad (93)
\end{aligned}
$$

oftewel:

$$
l^{II} = l^{II}_{NCP} + \tan^{-1}\left(\frac{\cos\delta \sin(\alpha - \alpha_{NGP})}{\cos\delta \, sin\delta_{NGP} \cos(\alpha - \alpha_{NGP}) - \sin\delta \cos\delta_{NGP}}\right) \qquad (94)
$$

De inverse transformatieformules zijn even eenvoudig:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_{NGP} + \tan^{-1}\left(\frac{\cos b^{II} \sin(l^{II} - l^{II}_{NCP})}{\cos b^{II} \, sin\delta_{NGP} \cos(l^{II} - l^{II}_{NCP}) - \sin b^{II} \cos\delta_{NGP}}\right) \qquad (95) \\
\delta &= \sin^{-1}\left(\sin b^{II} \sin\delta_{NGP} + \cos b^{II} \cos\delta_{NGP} \cos(l^{II} - l^{II}_{NCP})\right) \qquad (96)
\end{aligned}
$$

Als we voor l^{II} λ schrijven en voor b^{II} β dan gelden bovenstaande formules voor de transformatie van en naar ecliptische coördinaten. $(\alpha_{ENP}, \delta_{ENP})$ zijn dan de equatoriale coördinaten van de ecliptische noordpool, $(18^h, 66\overset{\circ}{.}5)$, en λ_{NCP} is de ecliptische lengte van de noordelijke hemelpool $(90°)$.
In figuur 6 (pag. 6) is het Galactische coördinaatsysteem weergegeven als functie van de equatoriale (RA,DEC) coördinaten en omgekeerd.