

# Fragmente der ebenen hyperbolischen Geometrie

Victor Pambuccian

*Friedrich Bachmann in memoriam*

**Abstract.** We provide quantifier-free axiomatizations for two fragments of hyperbolic geometry: the hyperbolic geometry of restricted ruler (which can be used to draw the line joining two distinct point, but *not* to construct the intersection point of two lines), segment-transporter, and set square constructions, and the geometry of BACHMANN's *Treffgeradenebenen*, and show that both are, in a precise sense, *naturally occurring* fragments of standard hyperbolic geometry.

2000 Mathematics Subject classification: 51M10, 03B30, 03F65.

Keywords: constructive axiomatization, geometric constructions, Treffgeradenebenen.

1. F. BACHMANN [3], [2, §19,3, Satz 7] stellte und beantwortete folgende Frage: Welches ist die Geometrie, in der genau alle Allheitsaussagen der euklidischen Standardebene gültig sind, die in der Sprache der mit Lineal (das nur zum Verbinden zweier Punkte, aber nicht zur Konstruktion des Schnittpunktes zweier sich schneidender Geraden benutzt werden kann), Rechtwinkelmaß (das sowohl zum Errichten als auch zum Fällen von Senkrechten benutzt werden kann) und Eichmaß (oder Streckenabtrager) ausführbaren Grundkonstruktionen ausgedrückt werden können? Es ist die Geometrie der sogenannten metrisch-euklidischen Ebenen mit freier Beweglichkeit. Ein klassisches, mit dem vierstelligen Grundprädikat der Streckenkongruenz ausgedrücktes Axiomensystem für diese Ebenen erhält man indem man zum Axiomensystem für nicht-elliptische metrische Ebenen aus [27] das Axiom vom Rechtseit (s. [2, §6,7]) und ein Streckenabtragbarkeitsaxiom hinzufügt, das besagt, das eine Strecke  $AB$  auf der Geraden  $g$ , die durch  $A$  geht, von  $A$  aus auf zwei Arten abgetragen werden kann. Aus Allheitsaussagen bestehende Axiomensysteme für Varianten dieser Geometrie, in denen der Streckenabtrager Strecken auf einer gegebenen Halbgerade abträgt oder mit einem Eichmaß ersetzt wird, sind in [17] (s. auch [18]) bzw. in [22] zu finden. Das Problem der algebraischen Beschreibung der Modelle der metrisch-euklidischen Ebenen mit freier Beweglichkeit wurde in [3] und [2, §19,3, Satz 7] gelöst.

In der vorliegenden Note wird sowohl dieselbe Frage als auch eine zweite Frage, in der die Menge der Grundkonstruktionen um ein *hyperbolisches Lineal* erweitert wird, für die hyperbolische Standardebene beantwortet. Dabei ist das hyperbolische Lineal ein spezifisch hyperbolisches

Zeicheninstrument, das von AL-DHAHIR [1] eingeführt wurde, mit dem man zu zwei sich schneidenden Geraden von den Enden der ersten auf die zweite Gerade Lote fallen kann, Eine Variante der erste Frage wurde bereits von F. BACHMANN in [4] beantwortet. Dort wird gefragt, welches die Menge der mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Streckenabtrager konstruierbaren Punkte ist, wenn man von zwei Punkten  $O = (0, 0)$  und  $A = (\frac{1}{2}, 0)$  innerhalb des Kleinschen Einheitskreisinneren-Modells der hyperbolischen Ebene ausgeht. Da die Antwort wesentlich von der Wahl der Abzisse  $a$  im Punkt  $A = (a, 0)$  abhängt, und eine rein geometrische Charakterisierung des Konstruktionsbereiches, selbst im Fall  $a = \frac{1}{2}$ , für den er in [4, Satz 3] bestimmt wird, bisher nicht bekannt war, ist das Problem der Bestimmung eines Axiomensystems der hyperbolischen Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß und Streckenabtrager weder durch die Erörterungen aus [4] noch durch die eingehenderen Untersuchungen in [7] angesprochen. Die Antwort auf die zweite Frage, die die hyperbolische Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß, Streckenabtrager und hyperbolischem Lineal betrifft, beantwortet zugleich die Frage nach einer rein geometrischen Charakterisierung der in [2, §18,6] und [4] beschriebenen Treffgeradenebenen, denn die Geometrie dieser Ebenen ist genau die hyperbolische Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß, Streckenabtrager und hyperbolischem Lineal.

Für nicht-konstruktive Axiomatisierungen der Geometrie in Sprachen erster Stufe sei auf [28] hingewiesen.

**2.** Um genau ausdrücken zu können, was wir unter der Geometrie einer bestimmten Menge von Grundkonstruktionen verstehen, werden wir zwei Sprachen erster Stufe einführen, eine einsortige  $\mathbf{S}$ , deren Individuenvariablen Punkte sind und mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, und eine zweisortige Sprache erster Stufe  $\mathbf{S}'$ , deren Individuenvariablen Punkte und Geraden sind, wobei wir für Punkte große und für Geraden kleine lateinische Buchstaben verwenden, und in denen gewisse Operationszeichen die Rolle der Grundkonstruktionen spielen werden. Die Axiomensysteme bestehen ausschließlich aus Allheitsaussagen. Solche Axiomensysteme werden *konstruktiv* genannt, und eine Fülle von Beispielen konstruktiver Axiomensysteme für ebene Geometrien sind in [10], [5],[6], [29], [12]-[24] zu finden.

Die zwei Sprachen, in der die Axiomensysteme ausgedrückt sein werden, sind  $\mathbf{S}$ , mit  $a_0, a_1, a_2, F, \tau$  als Grundbegriffe, und  $\mathbf{S}'$ , die als Grundbegriffe  $A_0, A_1, A_2, \varphi, \perp, \tau', \lambda_1$  und  $\lambda_2$  enthält. Dabei werden  $a_0, a_1, a_2$  (bzw.  $A_0, A_1, A_2$ ) als drei Punkt konstanten interpretiert;  $F(abc)$  ist der Fußpunkt der Senkrechten durch  $c$  zu  $ab$ , falls  $a \neq b$ , ein beliebiger Punkt andernfalls,  $\tau(abcd)$  und  $\tau(bacd)$  sind die zwei Punkte  $x$  auf der Geraden  $cd$  für die  $cx$  zu  $ab$  kongruent sind, falls  $c \neq d$  ist, andernfalls beliebige Punkte, ( $\tau$  ist also ein Streckenabtrager, der die Richtungen auf einer Geraden nicht unterscheiden kann);  $\varphi$  ist ein zweistelliges Operationszeichen, dessen Argumente Punktvariablen sind, so daß  $\varphi(A, B)$  die Verbindungsgerade der Punkte  $A$  und  $B$  liefert, falls diese verschieden sind, andernfalls eine beliebige Gerade ( $\varphi$  ist also ein Lineal);  $\perp$  ein zweistelliges Operationszeichen, dessen erstes Argument eine Punkt und dessen zweites

eine Geradenvariable ist, so daß  $\perp(P, g)$  den Fußpunkt der Senkrechten von  $P$  auf  $g$  liefert;  $\tau'$  ist ein vierstelliges Operationszeichen, dessen erste drei Argumente Punktvariablen sind, und dessen letztes eine Geradenvariable ist, so daß,  $\tau'(A, B, C, g)$  und  $\tau'(B, A, C, g)$  die zwei Punkte  $P$  auf der Geraden  $g$  sind, für die die Strecken  $CP$  und  $AB$  kongruent sind, falls  $C$  auf der Geraden  $g$  liegt (d.h.  $g = \varphi(C, C')$  mit  $C' \neq C$ ), andernfalls zwei beliebige Punkte sind;  $\lambda_i$  ein dreistelliges Operationszeichen, dessen Argumente Punktvariablen sind, so daß  $\lambda_1(A, B, C)$  und  $\lambda_2(A, B, C)$  die zwei Geraden sind, die zu  $\varphi(A, B)$  parallel sind und auf  $\varphi(A, C)$  senkrecht stehen, falls  $A, B, C$  drei nicht-kollineare Punkte sind (d.h. verschiedene Punkte, für die  $\varphi(A, B) \neq \varphi(A, C)$ ), und die Geraden  $\varphi(A, B)$  und  $\varphi(A, C)$  nicht orthogonal sind, andernfalls zwei beliebige Geraden sind.<sup>1</sup>

**3.** Zur besseren Lesbarkeit des Axiomensystems für nicht-elliptische metrische Ebenen mit Winkelhalbierbarkeit führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}\lambda(abc) &: \leftrightarrow \tau(abac) = b \vee \tau(baac) = b, \\ L(abc) &: \leftrightarrow c = a \vee \lambda(abc), \\ ab \equiv_1 cd &: \leftrightarrow c \neq d \wedge (\tau(abcd) = d \vee \tau(bacd) = d), \\ ab \equiv cd &: \leftrightarrow (a = b \wedge c = d) \vee ab \equiv_1 cd, \\ \sigma(ab) &: = \tau(baab).\end{aligned}$$

$L$  ist das Kollinearitätsprädikat,  $\equiv$  die Streckenkongruenzbeziehung, und  $\sigma$  die Punktspiegelungsoperation ( $\sigma_a$ , die Abbildung die mittels  $x \mapsto \sigma(ax)$  definiert ist, ist die Spiegelung an dem Punkt  $a$ ; wir werden sie nur für  $a \neq x$  benutzen).

Ein Axiomensystem für nicht-elliptische metrische Ebenen, in einer einsortigen Sprache mit Punktvariablen und mit  $L$  und  $\equiv$  als Grundbegriffe formuliert<sup>2</sup>, wurde von K. SÖRENSEN [27] angegeben. Es besteht aus den folgenden Axiomen:<sup>3</sup>

**A 1**  $L(aba)$ ,

**A 2**  $L(abc) \rightarrow L(cba) \wedge L(bac)$ ,

**A 3**  $a \neq b \wedge L(abc) \wedge L(abd) \rightarrow L(acd)$ ,

**A 4**  $ab \equiv ab$ ,

---

<sup>1</sup>Wir hätten in beiden Fällen zweisortige Sprachen wählen können. Wir zogen die Axiomatisierung in einer einsortigen Sprache deshalb vor, weil uns einsortige Sprachen, sowie die darin ausgedrückten Axiomensysteme einfacher zu sein scheinen. S. [11] für Logisches zu mehrsortigen Sprachen.

<sup>2</sup>Die Beziehung  $\equiv$  reicht zur Axiomatisierung aus, da man  $L(abc)$  durch  $(\exists uv)u \neq v \wedge au \equiv av \wedge bu \equiv bv \wedge cu \equiv cv$  definieren und somit ein jedes Auftreten von  $L$  durch diese Definition ersetzen kann.

<sup>3</sup>Wir drücken alle Allheitsaussagen als quantorenfreie Formeln aus.

$$\mathbf{A\ 5} \quad ab \equiv cd \wedge ab \equiv ef \rightarrow cd \equiv ef,$$

$$\mathbf{A\ 6} \quad ab \equiv ba,$$

$$\mathbf{A\ 7} \quad aa \equiv bb,$$

$$\mathbf{A\ 8} \quad ab \equiv cc \rightarrow a = b,$$

$$\mathbf{A\ 9} \quad (\forall abca'b')(\exists =^1 c') [a \neq b \wedge L(abc) \wedge ab \equiv a'b' \rightarrow L(a'b'c') \wedge ac \equiv a'c' \wedge bc \equiv b'c'],$$

$$\mathbf{A\ 10} \quad \neg L(abx) \wedge L(abc) \wedge L(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ac \equiv a'c' \\ \wedge ax \equiv a'x' \wedge bx \equiv b'x' \rightarrow xc \equiv x'c',$$

$$\mathbf{A\ 11} \quad (\forall abx)(\exists =^1 x') [\neg L(abx) \rightarrow x' \neq x \wedge ax \equiv ax' \wedge bx \equiv bx'],$$

$$\mathbf{A\ 12} \quad \neg L(abx) \wedge \neg L(aby) \wedge ax \equiv ax' \wedge bx \equiv bx' \wedge x \neq x' \wedge ay \equiv ay' \wedge by \equiv by' \\ \wedge y \neq y' \rightarrow xy \equiv x'y',$$

$$\mathbf{A\ 13} \quad (\forall abxx')(\exists y) [\neg L(abx) \wedge x' \neq x \wedge ax \equiv ax' \wedge bx \equiv bx' \rightarrow L(aby) \wedge L(xx'y)],$$

$$\mathbf{A\ 14} \quad (\forall ab)(\exists =^1 b') [a \neq b \rightarrow L(abb') \wedge ab \equiv ab' \wedge b' \neq b],$$

$$\mathbf{A\ 15} \quad (\forall xyzab)(\exists c) [x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge L(xyz) \wedge L(xya) \wedge ax \equiv ay \wedge L(yzb) \\ \wedge by \equiv bz \rightarrow cz \equiv cx],$$

$$\mathbf{A\ 16} \quad \neg L(xyz) \wedge L(axy) \wedge ax \equiv ay \wedge L(bzy) \wedge bz \equiv by \wedge L(cxz) \wedge cx \equiv cz \rightarrow \neg L(abc),$$

$$\mathbf{A\ 17} \quad (\exists abc) \neg L(abc).$$

Neben den Axiomen A2, A3, A5, A10, A12 (mit bloß  $\equiv_1$  statt  $\equiv$  in der Hypothese), A16, die wir nun als in  $\mathbf{S}$  ausgedrückt denken (d. h.  $L$  und  $\equiv$  werden durch die entsprechenden Definitionen ersetzt), enthält unser Axiomensystem folgende Axiome:

$$\mathbf{C\ 1} \quad a \neq b \rightarrow \tau(abab) = b,$$

$$\mathbf{C\ 2} \quad a \neq b \wedge c \neq d \rightarrow \tau(abcd) \neq \tau(bacd),$$

$$\mathbf{C\ 3} \quad b \neq c \rightarrow \tau(abc) = b,$$

$$\mathbf{C\ 4} \quad ab \equiv_1 a'b' \wedge \lambda(acb) \rightarrow \tau(abc'a') = \tau(aca'b') \vee \tau(abc'a') = \tau(caa'b') \\ \vee \tau(cbb'a') = \tau(aca'b') \vee \tau(cbb'a') = \tau(caa'b'),$$

$$\mathbf{C\ 5} \quad ab \equiv_1 a'b' \wedge \lambda(acb) \wedge ac \equiv_1 a'c' \wedge bc \equiv_1 b'c' \wedge ac \equiv_1 a'c'' \wedge bc \equiv_1 b'c'' \rightarrow c' = c'',$$

$$\mathbf{C\ 6} \quad \neg L(abx) \rightarrow ax \equiv_1 a\sigma(F(abx)x) \wedge bx \equiv_1 b\sigma(F(abx)x),$$

$$\mathbf{C\ 7} \quad \neg L(abx) \wedge x \neq x' \wedge ax \equiv_1 ax' \wedge bx \equiv_1 bx' \rightarrow x' = \sigma(F(abx)x),$$

$$\mathbf{C\ 8} \quad L(abF(abx)),$$

$$\mathbf{C\ 9} \quad a \neq b \wedge L(abb') \wedge b \neq b' \wedge ab \equiv_1 ab' \rightarrow b' = \sigma(ab),$$

$$\mathbf{C\ 10} \quad x \neq a \wedge b \neq \sigma(ax) \wedge a \neq b \wedge \lambda(abx) \\ \rightarrow (\sigma(\tau(b\sigma(ax)ab)x) = \sigma(b\sigma(ax))) \vee \sigma(\tau(\sigma(ax)bab)x) = \sigma(b\sigma(ax))),$$

$$\mathbf{C\ 11} \quad \neg L(a_0a_1a_2),$$

$$\mathbf{C\ 12} \quad a \neq b \wedge c \neq d \rightarrow L(cd\tau(abcd)),$$

$$\mathbf{C\ 13} \quad c \neq d \wedge \tau(abcd) = c \rightarrow a = b,$$

$$\mathbf{C\ 14} \quad a \neq b \wedge c \neq d \wedge c \neq e \wedge \lambda(cde) \rightarrow \tau(abce) = \tau(abcd) \vee \tau(bace) = \tau(abcd),$$

$$\mathbf{C\ 15} \quad a \neq b \wedge \lambda(axb) \leftrightarrow a \neq b \wedge F(abx) = x.$$

Wir bezeichnen mit  $\Sigma$  dieses in  $\mathbf{S}$  ausgedrückte Axiomensystem, das aus A2, A3, A5, A10, A12, A16, C1–C15 besteht. Es ist leicht einzusehen, daß die Axiome A1–A17 aus  $\Sigma$  herleitbar sind. A1 folgt aus der Definition von  $L$ , A4 und A6 folgen aus C1, A7 und A8 folgen aus der Definition von  $\equiv$ , A9 folgt aus C3, C4 und C5 (wobei C3 sichert, daß  $ab \equiv_1 a'b' \rightarrow a \neq b$ ), A11 folgt aus C6, C15 (um in C6  $F(abx) \neq x$  schließen zu können) und C7, A13 folgt aus C7, C8 und C12, die Existenzaussage in A14 folgt aus C12, C13, C14, C1 mit  $b' = \sigma(ab)$ , die Eindeutigkeitsaussage aus C9, A15 folgt aus C10, und A17 folgt aus C11. C12–C15 sichern daß  $\tau$  und  $F$  die beabsichtigten Interpretationen haben. Laut [26, Satz 1] gilt der folgende:

**Satz 1.** *Die Modelle von  $\Sigma$  sind darstellbar als zugehörige<sup>4</sup>, den Punkt  $(0,0,1)$  enthaltende metrische Teilebenen einer projektiv-metrischen Ebene  $\mathfrak{P}(K,k)$  über einem pythagoreischen Körper  $K$ , in der kein Punkt auf der Geraden  $[0,0,1]$  liegt, so daß wir die Punkte des Modells in der Form  $(a,b,1)$  schreiben können. Ein Punkt  $\mathbf{p} = (a,b,1)$  liegt auf einer Geraden  $[u,v,w]$  genau dann wenn  $au + bv + w = 0$ , zwei Geraden  $[u,v,w]$  und  $[u'v',w']$  sind orthogonal genau dann wenn  $uu' + vv' + kw'w' = 0$ , und zwei Strecken  $\mathbf{pp}'$  und  $\mathbf{qq}'$  sind kongruent genau dann wenn  $d_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = d_k(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ , wobei, falls  $k \neq 0$ ,  $d_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{F_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}')^2}{F_k(\mathbf{p}, \mathbf{p})F_k(\mathbf{p}', \mathbf{p}')}$ , mit  $F_k((a,b,1), (a',b',1)) = k(aa' + bb') + 1$ , und  $d_0((a,b,1), (a',b',1)) = (a - a')^2 + (b - b')^2$ . Im Falle  $k \neq 0$  muß für alle  $\mathbf{p}$  des Modells  $F_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \neq 0$  gelten.*

<sup>4</sup>Eine metrische Teilebene einer projektiv-metrischen Ebene heißt *zugehörig* wenn sie mit jedem Punkt auch alle mit ihm inzidierenden Geraden der projektiv-metrischen Ebene enthält.

Wir führen nun ein weiteres Axiom ein, das besagt, daß die Konstante  $k$  kein Quadrat in  $K$  ist. Beim Ausdrücken dieses Axioms werden wir folgende Abkürzungen benutzen, die eine unerläßliche Verkürzung der Formeln erlauben:  $\alpha := F(abo), \beta := F(oa\alpha), \gamma := F(oba), \delta := F(ab\beta), \epsilon = F(ob\delta), \mu := F(\beta\gamma o), \nu := F(ob\mu)$ .

**C 16**  $o \neq a \wedge o \neq b \wedge F(oab) = o \wedge oa \equiv ob \wedge c \neq o \wedge F(ocv) = c \rightarrow F(abc) \neq \epsilon$ .

Es ist stets möglich, mittels einer Koordinatentransformation (s. [7, S. 38]) unter der  $k$  in  $ks^2$  übergeführt wird, also in derselben Quadratklasse bleibt, zu sichern, daß eine metrische Ebene mit Winkelhalbierbarkeit (d.h. ein Modell von  $\Sigma$ ) sowohl  $(0, 0, 1)$  als auch  $(1, 0, 1)$  enthält. Da die dritte Koordinate aller Punkte 1 ist, werden wir von nun an nur die ersten zwei Koordinaten schreiben. Gilt in solch einem Modell  $\mathfrak{M}$  von  $\Sigma$  das Axiom C16, so muß dessen Forderung auch für  $o = (0, 0), a = (1, 0), b = (0, 1)$  gültig sein. Für diese Werte von  $o, a, b$  sind  $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \beta = (\frac{1}{2}, 0), \gamma = (0, \frac{1}{2}), \delta = (\frac{k+3}{k+4}, \frac{1}{k+4}), \epsilon = (0, \frac{1}{k+4}), \mu = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \nu = (0, \frac{1}{4}), c = (x, y), F(abc) = (0, y)$ , wobei  $x$  und  $y$  der Gleichung  $y = 4x^2 + 4y^2$  genügen. Die Forderung von C16, daß  $F(abc) \neq \epsilon$  sei, ist gleichwertig mit  $y \neq \frac{1}{k+4}$ , d.h. mit  $k \neq \frac{1-4y}{y}$ . Da  $\frac{1-4y}{y} = \frac{4x^2}{y^2}$  ist, ist die Bedingung  $F(abc) \neq \epsilon$  erfüllt falls  $k$  nicht Quadrat ist. Andererseits kann sie nicht erfüllt sein, wenn  $k$  Quadrat wäre. Wäre nämlich  $k = q^2$ , so würde  $F(abc) = \epsilon$  für  $c = (\frac{q}{2(k+4)}, \frac{1}{k+4})$  (der ein Punkt von  $\mathfrak{M}$  sein muß denn  $c$  ist der Fußpunkt der Senkrechten aus  $\nu$  auf der Geraden  $oc$  (die, laut Zugehörigkeitsbedingung, eine Gerade in  $\mathfrak{M}$  ist)). Folglich gilt

**Satz 2.** *Die Modelle von  $\Sigma \cup \{C16\}$  sind die in Satz 1 beschriebenen metrischen Ebenen, deren metrische Konstante der Bedingung  $k \notin K^2$  genügt.*

Wir behaupten, daß:

**Theorem 1.**  $Cn_{\mathfrak{S}\forall}(\Sigma \cup \{C16\}) = Th_{\mathfrak{S}\forall}\mathfrak{K}_2(\mathbb{R})$ , d.h.  $\Sigma \cup \{C16\}$  ist ein Axiomensystem für die Theorie, die alle **S**-Allheitsaussagen<sup>5</sup>, die in der hyperbolischen Standardebene<sup>6</sup> gültig sind, enthält. Anders ausgedrückt, ist  $\Sigma \cup \{C16\}$  ein Axiomensystem für die ebene hyperbolische Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß und Streckenabtrager.

**Beweis.** Da  $Cn_{\mathfrak{S}\forall}(\Sigma \cup \{C16\}) \subseteq Th_{\mathfrak{S}\forall}\mathfrak{K}_2(\mathbb{R})$  trivial ist, müssen wir nur  $Th_{\mathfrak{S}\forall}\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}) \subseteq Cn_{\mathfrak{S}\forall}(\Sigma \cup \{C16\})$  beweisen. Sei  $\mathfrak{M}$  ein beliebiges Modell von  $\Sigma \cup \{C16\}$ . Da die metrische Konstante  $k$  von  $\mathfrak{M}$  nicht ein Quadrat im Koordinatenkörper  $K$  von  $\mathfrak{M}$  ist, gibt es eine Anordnung  $<$  von  $K$ , für die  $k$  negativ ist. Es sei  $R^a$  der reelle Abschluß des angeordneten Körpers  $(K, <)$ . In  $R^a$  ist somit  $-k$  ein Quadrat. Aus dem berühmten Satz von TARSKI folgt,

<sup>5</sup>Hier sind nur diejenigen **S**-Allheitsaussagen gemeint, in denen die in den Operationen auftretenden Variablen stets den Bedingungen für die geometrisch sinnvolle Definition der betreffenden Operation genügen.

<sup>6</sup> $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R})$  ist das Kleinsche Modell der hyperbolischen Geometrie mit  $\mathbb{R}$  als Koordinatenkörper, und  $Cn_{\mathfrak{L}\forall}(\Delta)$  bezeichnet die Menge aller **L**-Allheitsaussagen, die aus  $\Delta$  herleitbar sind.

daß  $Th_{\mathcal{S}\forall\mathcal{K}_2}(\mathbb{R}) = Th_{\mathcal{S}\forall\mathcal{K}_2}(R^a)$ . Da, laut einem modelltheoretischen Satz von TARSKI (s. [8, Cor. 2.4.2]), Allheitsaussagen erblich sind (d.h. in Unterstrukturen erhalten bleiben) sind alle Aussagen aus  $Th_{\mathcal{S}\forall\mathcal{K}_2}(R^a)$ , also aus  $Th_{\mathcal{S}\forall\mathcal{K}_2}(\mathbb{R})$ , bereits in  $\mathfrak{M}$  gültig. Da  $\mathfrak{M}$  ein beliebiges Modell von  $\Sigma \cup \{\text{C16}\}$  war, ist  $Th_{\mathcal{S}\forall\mathcal{K}_2}(\mathbb{R}) \subseteq Cn_{\mathcal{S}\forall}(\Sigma \cup \{\text{C16}\})$ .  $\square$

4. Es ist leicht einzusehen, daß die Axiome des Axiomensystems  $\Sigma$  sich in die Sprache  $\mathbf{S}'$  (ohne  $\lambda_i$  zu benutzen) übersetzen lassen (dabei wird C14 überflüssig und statt C1 haben wir  $A \neq B \rightarrow \tau(A, B, A, \varphi(A, B)) = B$ , so daß wir für  $A \neq B$  die Punktspiegelungsoperation  $\sigma$  mittels  $\sigma(A, B) := \tau(B, A, A, \varphi(A, B))$  definieren), und daß die folgenden Axiome genügen, um die Inzidenzbeziehung zu erklären und zu sichern, daß jede Gerade die Verbindungsgerade zweier Punkte ist (in C19 wird modulo 3 addiert):

$$\mathbf{C\ 17} \quad \varphi(A, B) = \varphi(B, A),$$

$$\mathbf{C\ 18} \quad A \neq B \wedge B \neq C \wedge B \neq D \wedge \varphi(A, B) = \varphi(D, C) \rightarrow \varphi(D, B) = \varphi(B, C),$$

$$\mathbf{C\ 19} \quad \bigvee_{i=0}^2 [g = \varphi(\perp(A_i, g), \perp(A_{i+1}, g)) \wedge \perp(A_i, g) \neq \perp(A_{i+1}, g)].$$

Es drücke

$$\kappa(A, B, C) := A = B \vee A = C \vee \varphi(A, B) = \varphi(A, C)$$

die Kollinearität der drei Punkte  $A, B, C$  aus.

Wir bezeichnen mit  $\Sigma'$  das so erhaltene Axiomensystem für metrische Ebenen mit Winkelhalbierbarkeit, und führen folgende Abkürzungen ein:

$$\varphi(A, B) \top g : \leftrightarrow \varphi(A, \perp(A, g)) = \varphi(A, B),$$

$$\omega(A, B, C) : = \perp(A, \varphi(\sigma(A, B), \sigma(\perp(B, \varphi(A, C)), B))).$$

Hier bedeutet  $\varphi(A, B) \top g$ , daß die Geraden  $\varphi(A, B)$  und  $g$  orthogonal sind (und wird werden diese Beziehung nur für  $A \neq B$  und  $A$  nicht auf  $g$  benutzen), und  $\omega(A, B, C)$  ist ein von  $A$  verschiedener Punkt auf der Senkrechten in  $A$  auf  $\varphi(A, C)$  (falls  $A, B$  und  $C$  nicht kollinear sind).

Fügen wir  $\Sigma'$  das folgende Axiom hinzu, das besagt, daß falls  $A, B, C$  drei nicht-kollineare Punkte sind, und das Dreieck  $ABC$  in  $A$  nicht rechtwinklig ist, die Geraden  $\lambda_i(A, B, C)$  (i) verschieden sind, (ii) zu  $\varphi(A, B)$  parallel sind (wofür wir das Parallelitätskriterium von BERGAU (s. [2, §14,3, S. 224 (Kriterium)]) benützen werden) und (iii) zu  $\varphi(A, C)$  senkrecht stehen, so erhalten wir ein Axiomensystem für die in [2, §18,6] beschriebenen *Treffgeradenebenen*:

$$\mathbf{C\ 20} \quad \neg \kappa(A, B, C) \wedge \perp(C, \varphi(A, B)) \neq A \rightarrow \lambda_1(A, B, C) \neq \lambda_2(A, B, C)$$

$$\bigwedge_{i=1}^2 [\varphi(A, \omega(A, B, C)) \top \varphi(\perp(\omega(A, B, C), \varphi(A, B)), \perp(\omega(A, B, C), \lambda_i(A, B, C))) \wedge \varphi(A, \perp(A, \lambda_i(A, B, C))) = \varphi(A, C) \wedge A \neq \perp(A, \lambda_i(A, B, C))].$$

Ist  $K$  ein pythagoreischer Körper, so besteht die  $K$ -Treffgeradenebene (s. [2, §18,6], [4]) aus allen Geraden der projektiv-metrischen Ebene  $\mathfrak{P}(K, -1)$ , die den Einheitskreis (die Menge aller Punkte  $(x, y)$  mit  $x^2 + y^2 = 1$ ) in zwei verschiedenen Punkten trifft (diese Geraden werden auch *Treffgeraden* genannt), und aus allen Punkten von  $\mathfrak{P}(K, -1)$ , für die jede mit ihnen inzidierende Gerade Treffgerade ist.

Um einzusehen, daß die Modelle von  $\Sigma' \cup \{\text{C20}\}$  genau die Treffgeradenebenen sind, sei erstens bemerkt, daß ein Modell  $\mathfrak{M}$  von  $\Sigma' \cup \{\text{C20}\}$  metrisch-nichteuklidisch sein muß (da C20 in metrisch-euklidischen Ebenen ( $k = 0$ ) offensichtlich falsch ist), und daß die Polarität in der Idealebene von  $\mathfrak{M}$  hyperbolisch sein muß (s. [2, §14,3, S. 224, Aufgabe b)), d. h.  $-k \in K^2$ , und somit die metrische Konstante mittels einer Koordinatentransformation auf -1 normiert werden kann. Da  $\mathfrak{M}$  eine metrische Ebene mit Winkelhalbierbarkeit ist, gilt für sie die Beschreibung aus Satz 1, und somit muß  $\mathfrak{M}$  alle Geraden durch den Ursprung  $O = (0, 0)$  enthalten. Es seien  $(x, y)$  und  $(u, v)$  zwei beliebige Punkte von  $\mathfrak{P}(K, -1)$ , die auf dem Einheitskreis liegen. Die Geraden  $a$  und  $b$ , die den Ursprung  $O$  mit den Punkten  $(x, y)$  bzw.  $(u, v)$  verbinden, sind in  $\mathfrak{M}$ . Falls diese Geraden übereinstimmen, dann ist die Verbindungsgerade von  $(x, y)$  und  $(u, v)$  in  $\mathfrak{M}$ . Sind sie verschieden, so sei  $g$  die Senkrechte aus  $O$  auf die Verbindungsgerade von  $(x, y)$  und  $(u, v)$ . Als Gerade aus  $\mathfrak{P}(K, -1)$ , die durch  $O$  geht, muß sie in  $\mathfrak{M}$  sein. Sei  $P$  ein von  $O$  verschiedener Punkt auf  $g$ , und  $R$  ein von  $O$  verschiedener Punkt auf  $a$ . Dann ist eine der zwei Geraden  $\lambda_1(O, R, P)$  und  $\lambda_2(O, R, P)$  die Verbindungsgerade von  $(x, y)$  und  $(u, v)$ . Somit haben wir bewiesen, daß sich alle Treffgeraden in  $\mathfrak{M}$  befinden. Andererseits müssen alle Geraden  $g$  aus  $\mathfrak{M}$  Treffgeraden sein, denn sonst gäbe es keine hyperbolische Parallele zu  $g$ , was C20 verletzen würde. Laut Zugehörigkeitsbedingung müssen auch alle Geraden durch Punkte aus  $\mathfrak{M}$  Geraden des Modells  $\mathfrak{M}$ , d.h. Treffgeraden sein. Somit haben wir bewiesen:

**Satz 3.** *Jedes Modell von  $\Sigma' \cup \{\text{C20}\}$  ist zu einer  $K$ -Treffgeradenebene mit pythagoreischem Koordinatenkörper  $K$  isomorph.*

Ein zum Beweis des Theorems 1 Punkt für Punkt analoger Beweis liefert folgendes

**Theorem 2.**  $Cn_{\mathbf{S}'\forall}(\Sigma' \cup \{\text{C20}\}) = Th_{\mathbf{S}'\forall}\mathfrak{K}_2(\mathbb{R})$ . *Anders ausgedrückt, ist  $\Sigma' \cup \{\text{C20}\}$  ein Axiomensystem für die ebene hyperbolische Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß, Streckenabtrager und hyperbolischem Lineal.*

**5.** Es stellt sich die natürliche Frage nach der hyperbolischen Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß, Streckenabtrager und Parallellineal, d. h. die Frage nach  $Th_{\mathbf{L}\forall}\mathfrak{K}_2(\mathbb{R})$ , wobei  $\mathbf{L}$  sich von der Sprache  $\mathbf{S}'$  dadurch unterscheidet, daß sie statt den Operationszeichen  $\lambda_i$  die zweistelligen Operationszeichen  $\pi_i$  enthält, wobei  $\pi_1(P, l)$  und  $\pi_2(P, l)$  die zwei hyperbolischen Parallelen aus  $P$  zu  $l$  sind, falls  $P$  nicht auf  $l$  liegt, und beliebige Geraden falls  $P$  auf  $l$  liegt. Erstens sei bemerkt, daß die Operationen  $\pi_i$  in  $Cn_{\mathbf{S}'\forall}(\Sigma' \cup \{\text{C20}\})$  mittels

$$\pi_i(P, \varphi(A, B)) := \zeta(P, \varphi(A, \varrho(\varrho(A, g_i), \zeta(P, \varphi(A, B))))),$$



wobei  $\varrho(P, l) := \sigma(\perp(P, l), P)$  der Bildpunkt der Spiegelung von  $P$  an der Geraden  $l$  ist,  $\zeta(P, l) := \varphi(P, \perp(P, l))$  die Senkrechte aus  $P$  auf  $l$  ist, und  $g_i := \zeta(P, \varphi(\perp(P, \varphi(A, B)), \perp(P, \lambda_i(A, B, P))))$ , konstruktiv definierbar sind. In dieser Definition wurde angenommen, daß  $\neg\kappa(A, B, P), \varphi(A, B) \not\perp \varphi(A, P)$ , und daß  $P$  nicht auf  $\lambda_i(A, B, P)$  liegt (sonst wäre  $\pi_i(P, \varphi(A, B)) := \lambda_i(A, B, P)$  zu setzen). Daß diese Definition tatsächlich die zwei hyperbolischen Parallelen aus  $P$  zu  $\varphi(A, B)$  liefert folgt aus [2, §3,6, Satz 15]. Es ist nun leicht einzusehen, daß wenn wir zu  $\Sigma'$  ein Axiom hinzufügen, das besagt, daß die Geraden  $\pi_i(P, \varphi(A, B))$  durch  $P$  gehen und zu  $\varphi(A, B)$  hyperbolisch parallel sind (wofür wir wiederum das mit Hilfe von Inzidenz und Senkrechtstehen ausgedrückte Parallelitätskriterium von BERGAU benutzen), wir ein Axiomensystem für die hyperbolische Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß, Streckenabtrager und Parallellineal erhalten, für das die dem Satz 2, Theorem 1 bzw. Satz 3, Theorem 2 analogen Sätze gültig sind. Mit  $A' := \perp(P, \varphi(A, B))$  und

$$\begin{aligned} \mathbf{C\ 21} \quad & \neg\kappa(A, B, P) \rightarrow \pi_1(P, \varphi(A, B)) \neq \pi_2(P, \varphi(A, B)) \\ & \bigwedge_{i=1}^2 [\varphi(P, \omega(P, B, A')) \top \varphi(\perp(\omega(P, B, A'), \pi_i(P, \varphi(A, B))), \perp(\omega(P, B, A'), \varphi(A, B))) \\ & \pi_i(P, \varphi(A, B)) = \varphi(P, \perp(\omega(P, B, A'), \pi_i(P, \varphi(A, B)))) \\ & \wedge \perp(\omega(P, B, A'), \pi_i(P, \varphi(A, B))) \neq P] \end{aligned}$$

gilt also

**Satz 4.** *Jedes Modell von  $\Sigma' \cup \{\mathbf{C21}\}$  ist zu einer Unterstruktur einer  $K$ -Treffgeradenebene mit pythagoreischem Koordinatenkörper  $K$ , die zugleich eine metrische Ebene mit Winkelhalbierbarkeit ist, isomorph.*

**Theorem 3.**  $Cn_{\mathbf{L}\vee}(\Sigma' \cup \{\mathbf{C21}\}) = Th_{\mathbf{L}\vee} \mathfrak{K}_2(\mathbb{R})$ . *Anders ausgedrückt, ist  $\Sigma' \cup \{\mathbf{C21}\}$  ein Axiomensystem für die ebene hyperbolische Geometrie von Lineal, Rechtwinkelmaß, Streckenabtrager und Parallellineal.*

Es ist zu bemerken, daß die Operationen  $\lambda_i$  in  $Cn_{\mathbf{L}\vee}(\Sigma' \cup \{\mathbf{C21}\})$  nicht konstruktiv definierbar sind, m. a. W. daß es Modelle von  $\Sigma' \cup \{\mathbf{C21}\}$  gibt, die keine  $K$ -Treffgeradenebenen sind. Solche Modelle liefern die verallgemeinerten KLEINSchen Modelle der hyperbolischen HILBERT-Ebenen aus [26], deren Punktmenge aus einem Kreisinnern, von dem ein infinitesimales Randgebiet fehlt, besteht. Sei  $K$  ein euklidischer, nicht-archimedisch angeordneter Körper, sei  $P$  das Ideal der unendlich kleinen Elemente aus  $K$ , und sei  $E = \{\mathbf{X} \mid F_1(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0, F_1(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \notin P\} \subset \mathfrak{P}(K, -1)$  die Punktmenge einer Struktur  $\mathfrak{M}$ , deren Geradenmenge aus allen Geraden aus  $\mathfrak{P}(K, -1)$  besteht, die durch Punkte aus  $E$  gehen. Mit der üblichen Interpretation der Operationszeichen aus  $\mathbf{L}$  (s. Satz 1) ist  $\mathfrak{M}$  ein Modell von  $\Sigma' \cup \{\mathbf{C21}\}$ . Ist  $p \in P$ , so gehören die Geraden  $\lambda_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  mit  $\mathbf{A} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (\frac{\sqrt{1-p^2}}{2}, \frac{p}{2})$ ,  $\mathbf{C} = (\frac{1}{2}, 0)$  nicht zum Modell  $\mathfrak{M}$ , denn sonst müßten die Schnittpunkte  $\mathbf{X} = (\pm\sqrt{1-p^2}, 0)$  von  $\lambda_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  und  $\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ , in  $E$  sein, was nicht sein kann, da  $F_1(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = p^2 \in P$  ist.

Es ist eine offene Frage, ob  $\tau'$  durch die übrigen Operationen aus  $\mathbf{S}'$  definiert werden kann, so daß es in einer konstruktiven Axiomatisierung überflüssig wird. M. a. W., kann man die Konstruktionen des Streckenabtragers mit Lineal, Rechtwinkelmaß und hyperbolischem Lineal durchführen?

Es sei bemerkt, daß auch eines der wichtigsten Fragmente der ebenen hyperbolischen Geometrie, die Geometrie der KLINGENBERGSchen verallgemeinerten hyperbolischen Ebenen, die in [9] und [2, §14,1] in gruppentheoretischer Sprache beschrieben wurde, sowohl in der Sprache, die allein  $\equiv$  als Grundbegriff enthält, als auch konstruktiv in [25] axiomatisiert wurde.<sup>7</sup> Wir möchten hier nur noch erwähnen, daß alle Axiome des  $\equiv$ -Axiomensystems aus [25] als  $\forall\exists$ -Axiome ausgedrückt werden können. Die Axiome A1-A16 sind leicht dadurch einzig mit Hilfe von  $\equiv$  als  $\forall\exists$ -Axiome auszudrücken, daß man alle Formeln des Typs  $L(abc)$  mit der Definition aus Fußnote 3, und alle in den Axiomen vorkommenden Formeln des Typs  $\neg L(abc)$  mit  $(\exists c') a \neq b \wedge c' \neq c \wedge ac' \equiv ac \wedge bc' \equiv bc$  ersetzt, und Axiome der Form  $(\forall a_1 \dots a_n)(\exists^{=1} b) \varphi(a_1, \dots, a_n, b)$  in  $(\forall a_1 \dots a_n)(\exists b) \varphi(a_1, \dots, a_n, b) \wedge \varphi(a_1, \dots, a_n, b') \rightarrow b = b'$  spaltet. Axiom K1 aus [25], welches besagt, daß es zwei Punktepaare gibt, so dass die zwei Geraden, die von ihnen gebildet werden, weder eine gemeinsame Senkrechte noch einen gemeinsamen Punkt haben, kann mit Hilfe des oft zitierten Parallelitätskriteriums von BERGAU allein mit  $\equiv$  als Existenzaussage ausgedrückt werden.

## Literatur

- [1] M. W. AL-DHAHIR, An instrument in hyperbolic geometry, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 298–304.
- [2] F. BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [3] F. BACHMANN, Über die Konstruierbarkeit mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß, *Math.-Phys. Semesterber.* **1** (1949), 77–88.
- [4] F. BACHMANN, Eine Konstruierbarkeitsfrage für hyperbolische Ebenen, *Math. Z.* **87** (1965), 27–31.
- [5] E. ENGELER, Remarks on the theory of geometrical constructions, pp. 64–76 in: *Lecture Notes in Mathematics 72*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [6] E. ENGELER, *Metamathematik der Elementarmathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [7] D. GOLDENBAUM, *Konstruierbarkeitsbereiche in metrischen Ebenen*, Diss. Kiel, 1966.

---

<sup>7</sup>Korrektur zu [25]: Die Sprache, in der sie konstruktiv axiomatisiert werden kann muss vier Individuenkonstanten  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , die als vier Punkte zu interpretieren sind, für die die Geraden  $\varphi(A_0, A_1)$  und  $\varphi(A_2, A_3)$  weder einen Punkt noch eine Senkrechte gemeinsam haben, und nicht bloss drei Individuenkonstanten, die als drei nichtkollineare Punkte zu interpretieren sind, wie in [25] behauptet.

- [8] W. HODGES, *Model theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [9] W. KLINGENBERG, Eine Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Ann.* **127** (1954), 340–356.
- [10] N. MOLER, P. SUPPES, Quantifier-free axioms for constructive plane geometry, *Compositio Math.* **20** (1968), 143–152.
- [11] A. OBERSCHELP, Untersuchungen zur mehrsortigen Quantorenlogik, *Math. Ann.* **145** (1962), 297–333.
- [12] V. PAMBUCCIAN, Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* **35** (1989), 531–535.
- [13] V. PAMBUCCIAN, Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry II, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* **38** (1992), 345–348.
- [14] V. PAMBUCCIAN, Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry III, *Math. Logic Quart.* **39** (1993), 393–402.
- [15] V. PAMBUCCIAN, Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry IV, *Math. Logic Quart.* **40** (1994), 76–86.
- [16] V. PAMBUCCIAN, Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry V, *Math. Logic Quart.* **40** (1994), 455–477.
- [17] V. PAMBUCCIAN, Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry VI, *Math. Logic Quart.* **41** (1995), 384–394.
- [18] V. PAMBUCCIAN, Corrections to “Ternary operations as primitive notions for constructive plane geometry III, V, VI, *Math. Logic Quart.* **47** (2001), 136.
- [19] V. PAMBUCCIAN, Zur konstruktiven Geometrie euklidischer Ebenen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **68** (1998), 7–16.
- [20] V. PAMBUCCIAN, Another constructive axiomatization of Euclidean planes, *Math. Logic Quart.* **46** (2000), 45–48.
- [21] V. PAMBUCCIAN, Constructive axiomatization of plane absolute, Euclidean and hyperbolic geometry, *Math. Logic Quart.* **47** (2001), 129–135.
- [22] V. PAMBUCCIAN, On the geometry of the double-edged ruler, *Note Mat.* **19** (1999), 65–70.
- [23] V. PAMBUCCIAN, Constructive axiomatization of plane hyperbolic geometry, *Math. Logic Quart.* **47** (2001), 475–488.
- [24] V. PAMBUCCIAN, Constructive axiomatization of non-elliptic metric planes, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **51** (2003), 49–57.
- [25] V. PAMBUCCIAN, Fragments of Euclidean and hyperbolic geometry, *Sci. Math. Jpn.* **53** (2001), 361–400.
- [26] W. PEJAS, Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie, *Math. Annalen* **143** (1961), 212–235.

- [27] K. SÖRENSEN, Ebenen mit Kongruenz, *J. Geom.* **22** (1984), 15–30.
- [28] W. SCHWABHÄUSER, W. SZMIELEW, A. TARSKI, *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- [29] H. SEELAND, *Algorithmische Theorien und konstruktive Geometrie*, Hochschulverlag, Stuttgart, 1978.

Department of Integrative Studies, Arizona State University West, P. O. Box 37100, Phoenix, AZ 85069-7100, USA; e-mail: pamb@math.west.asu.edu